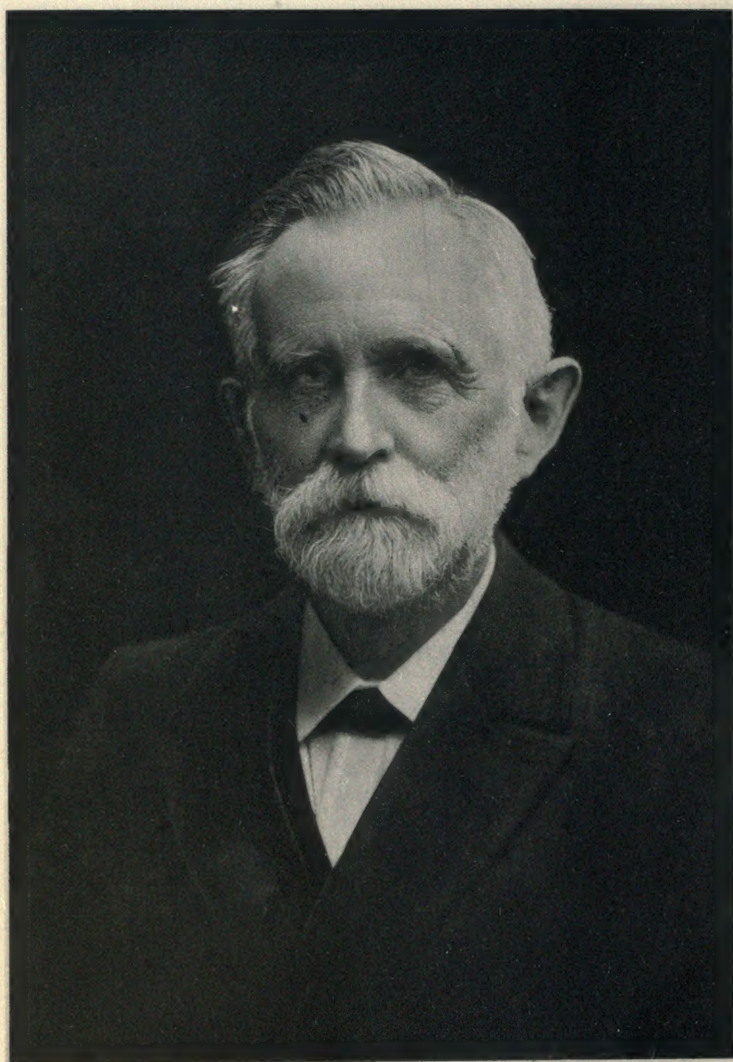

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01209468 6



H. G. Zeuthen

FESTSKRIFT

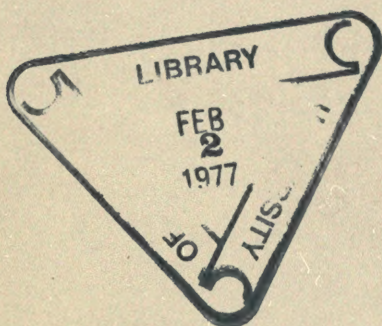
TIL

H. G. ZEUTHEN

FRA VENNER OG ELEVER
I ANLEDNING AF HANS 70 AARS FØDSELSDAG
15. FEBRUAR 1909



KØBENHAVN
KGL. HOFBOGHANDEL ANDR. FRED. HØST & SØN
TRYKT HOS J. JØRGENSEN & CO. (M. A. HANNOVER)
1909



At vi, ældre og yngre Elever og Venner af Professor H. G. Zeuthen, har forenet os om Udgivelsen af dette Skrift, skal fremfor alt opfattes som et Udtryk for den Beundring, vi nærer for Professor Zeuthens eget videnskabelige Arbejde, for de Berigelser, han har ydet Geometrien baade i Henseende til Methoder og til Resultater, og for de vægtige Bidrag, han har givet til Mathematikens Historie. Men det skal ogsaa være et Vidnesbyrd om vor Taknemmelighed for den Interesse, som Professor Zeuthen til enhver Tid har vist overfor vore Arbejder, og for de Impulser, mange af os skylder ham som Ven eller som Lærer.

Vi ønsker dette Festskrift betragtet som en Hyldest til den af vort Lands Mathematikere, hvis Navn er naaet videst om, og hvis Fortjenester har kastet særlig Glans over den danske Mathematik, til den Mand, hvis mangesidige videnskabelige Interesser og Indsigt vi skatter, hvis humane Tænkemaade vi højagter, og paa hvis Venskab vi sætter den største Pris.

INDHOLD.

Al-Chwârizmî's trigonometriske Tavler.

Af **Axel Anthon Bjørnbo.**

Baade *Zeuthen*[1] og *Cantor*[2] nævner Al-Battânî († 929) som den arabiske Forfatter, hos hvem man første Gang finder Sinus-Funktionen bragt i Anvendelse[3]. *Braunmühl*[4] tilføjer dog, at man ikke heraf maa slutte, at den ikke ogsaa forekommer hos ældre Forfattere; saaledes havde *Chasles*[5] allerede i Aaret 1846 gjort opmærksom paa, at der forekommer en Sinustavle hos *Al-Chwârizmî* († ca. 820—30), nemlig i hans Astronomi, som synes at være tabt i Originalsproget. I alt Fald kendes dette Værk kun i en latinsk Oversættelse fra det 12. Aarhundrede, som aldrig er udgivet, og om hvilket man overhovedet kun ved det lidt, som Chasles meddeler.

Den bedste af de tre Afskrifter af denne Oversættelse, som man til Dato har opdaget, havde jeg Lejlighed til at undersøge i Oxford i 1904; den var fra det 12. Aarhundrede[6]. De nødvendige Oplysninger om de to andre har jeg senere faaet ved de vedkommende Bibliotekers Velvilje. Det ene findes i Chartres og er ogsaa fra 12. Aarhundrede; det andet, noget yngre (13. Aarhundrede) og defekte Haandskrift fin-

[1] *H. G. Zeuthen*, Forelæsning over Mathematikens Historie I, Kbhvn. 1893. S. 275.
[2] *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 2. Aufl, Lpz. 1894, S. 693—94.
[3] Rudimenta astronomica Alfragani. Item Albatagnius (!) de motu stellarum, ed. Ioan. de Regiomonte, Norimbergæ 1537, Kap. III. — Al-Battānī sine Albatenii Opus astronomicum, ed. C. A. Nallino, Mediolani 1903—07. [4] *A. v. Braunmühl*, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, Lpz. 1900, S. 49. [5] *M. Chasles* i Comptes rendus de l'Académie des Sciences XXIII, Paris 1846, S. 848 ff. [6] Cod. Auct. F. I. 9 i Bodleian Library i Oxford. I dette Haandskrift findes Værket Bl. $99^v—159^v$, men det sidste Blad (159) hører hjemme mellem Blad 99 og Blad 100.

des i Bibliothèque Mazarine i Paris[7]. Paa dette Grundlag skal jeg tillade mig at fremlægge to i Al-Chwârizmî's Bog forekommende trigonometriske Tavler tilligemed de tilhørende Forklaringer.

Værkets Titel er (efter Oxforderhaandskriftet) »Ezich Elkaurezmi per Athelardum Bathoniensem ex arabico sumpta«[8], hvor Ezich er at forstaa som el-Zîg, d. v. s. astronomisk Tavleværk. Den *Athelard af Bath*, der nævnes som Oversætter, var en engelsk Benediktinermunk, der efter Rejser i Tyskland og et længere Studieophold i Laon og i den berømte Klosterskole i Tours drog til Italien, Grækenland, Forasien og Ægypten, hvorfra han vendte hjem over Spanien efter at have været 7 Aar borte. Paa denne Rejse lærte han arabisk, og han var den første, der for Alvor kastede sig over de arabiske matematisk-astronomiske Haandskrifter og gav sig til at oversætte dem.

Hans Hovedarbejder var en Euklidoversættelse[9] fra arabisk, hvis Histories meget indviklede Traade endnu ikke er redet ud, og en Regnebog (Abacus)[10]; men dertil kommer den i Note 8 nævnte *Abû Ma'schars* lille astrologiske Indledning og det astronomiske Tavleværk, vi her beskæftiger os med.

Af hans andre Arbejder ved vi, at hans Virksomhed falder omkring Aarene 1120—30, og dette bekræftes af Værket her, hvor der (i Oxforderhaandskriftet) Bl. 159^r over en Tavle med Titelen »Pagina inveniendi qua die intret quilibet mensis arabum« staar »Anno ab incarnatione domini MCXXVI (ɔ: 1126) die Januarii XXVI^a prima fuit dies Almuharran[11] et feria tertia, annus autem arabicus DXX^{us}«. Denne Oversætternotits tyder bestemt paa, at Oversættelsen er blevet til i 1126 eller i Tiden lige deromkring.

Iøvrig bærer hele Oversættelsen det aller tydeligste Præg af at

[7] Cod. 1258 i Bibliothèque Mazarine i Paris og Cod. 214 (før 173) i Bibliothèque de Chartres. I Pariserhaandskriftet synes den trigonometriske Del helt at mangle. [8] I Haandskriftet i Chartres er der ingen Titel. I Pariserhaandskriftet er Titelen »Liber Ezitcii. Incipit Liber ezichiafaris el Kaurezmi per Adelardum Bathoniensem ex arabico in latinum sumptus«. Betegnelsen »iafaris« har bragt *Wüstenfeld* (Die Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische, Abh. d k. Ges. d. Wiss z. Göttg. XXII, 1877, S. 21—22) til at gætte paa, at Værket maaske snarere skyldtes den berømte Astrolog Abû Ma'schar Ga'far Al-Balchî fra Chorâsân, som døde 886 over 100 Aar gammel. Selv om Wüstenfeld havde Ret heri, vilde Værket være betydelig ældre end Al-Battânî's, men *Steinschneider* oplyser, at »iafaris« beror paa en Forvexling med Muhammed ibn Mûsâ ibn Schâkir (Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters, Berlin 1893, S. 57). [9] Se *Weissenborn* i Abh. z. Gesch. d. Math. III, S. 143 ff. — *Curtze* i Philol. Rundschau I (1881), S. 943 ff. — *Heiberg* i Zeitschr. f. Math. u. Phys. 35 (1890), S. 48 ff. [10] Bullettino Boncompagni XIV (1881), S. 1—134. [11] Al-Muharram, den første Maaned i det arabiske Aar.

være blevet til i en Tid, da de vesterlandske Gejstlige — eller, om man vil, Lærde — endnu ikke havde nogen matematisk Uddannelse, der satte dem i Stand til at forstaa den blandede græsk-indisk-arabiske Lærdom, som den rige arabiske Overlevering havde at byde paa. Deres Latin slog navnlig aldeles ikke til overfor de mange Fagord. De enkelte Oversættelser fra Græsk, man har fra ældre Tid, saasom Ptolemæus' Almagest[12], Stykker af Archimedes og Euklids Data og Elementer[13] viser det samme: ofte en helt manglende Forstaaelse, altid en Vrimmel af faglige Laaneord, der for en Del er bevaret til vor Tid og gennem Latinen gaaet over i de moderne Sprog. De græske Fagord gik imidlertid ret glat over i det middelalderlige Latin, og Forskellen mellem de to Sprog var saa ringe, at selv en mindre kyndig Oversætter nogenlunde let klarede Skærene. Helt anderledes med det arabiske: Athelards Oversættelse af Al-Chwârizmî's Tavleværk, hvor han ikke som ved Euklids Elementer havde ældre Oversættelser fra Græsk at støtte sig til[14], og hvor han paa een Gang havde den store Sprogforskel, den mangelfulde Forstaaelse og de talrige paa Latin manglende Fagord at kæmpe med, viser en Ubehjælpsomhed, som paa os virker komisk, men som i al sin Snurrighed vidner om, at det var en tung Sten, den gode Athelard havde taget sig paa at løfte.

Løber vi Kapitel- eller Tavleoverskrifterne igennem, finder vi ved Siden af ren Latin som f. Ex. »De statione et progressione et retrogradatione planetarum«, »De recessu solis ab equinoctiali circulo« ren Arabisk som »Tadil elscems waelkamar«[15], »Gedval eligstimaat filcinum

[12] Denne gamle Oversættelse fra Græsk af Ptolemæus' Syntaxis er hidtil ikke omtalt i Litteraturen; jeg kender den fra et eneste Haandskrift Conv. soppr. A. 5. 2656 (Abbatie florentine), som jeg fandt i Biblioteca Nazionale i Firenze. Det er fra ca. Aar 1300 og vil nu blive nøjere undersøgt af Heiberg. Selve Titelen »mathematicae sintaxeos liber« og et Utal af græske Laaneord (anaphorae, decamiria, anomalia, omalum, epochus (!), psiphophoria, nictimorum, sinodus, panselunus, apoguion osv.) samt Personnavne som Iparcus, Timocharis og Menelaus, der regelmæssig fordrejes ved at passere arabisk, er fyldestgørende Beviser paa den direkte Overførelse fra Grundsproget. [13] Se *Heiberg* i Abh. z. Gesch. d. Math. V (1890), S. 3 ff., i Zeitschr. f. Math. u. Phys. 35 (1890), S. 48 ff. & 81 ff. og i Hermes XXXVIII (1903), S. 354—56. — Anaritii in x libros priores elementorum Euclidis commentarii ed. M. Curtze, Lips. 1899, Proleg. XVI—XXVI. Euklids Data findes i en uudgiven Oversættelse fra Græsk i flere latinske Haandskrifter: Dresd. Db. 86 (*Curtze* i Zeitschr. f. Math. u. Phys. 28 (1883), S. 10), Paris. 16648 og Bodl. Auct. F. 5. 28, alle tre fra det 13. eller Begyndelsen af 14. Aarh. [14] At en saadan ældre Euklidoversættelse fra Græsk er benyttet af Athelard, har *Heiberg* vist i Zeitschr. f. M. u. Ph. 35 (1890), S. 48 ff. [15] Tadil el schems wa el chamar = equatio solis et lunae.

elmagmoa«[16], men som oftest er Sproget et tungt Oversætterlatin, isprængt talrige arabiske Fagord, der snart forklares, snart bibeholdes uden nogen Art af Forklaring eller Oversættelse — af den gode Grund, at Athelard ingen saadan formaaede at give. Kulturhistorisk set er da netop denne Oversættelse ganske særdeles karakteristisk, fordi den paa Astronomiens og den beregnende Geometris Omraade betegner en Nybegyndelse paa næsten bar Bund af Kulturtilførsel til det vestlige Evropa[17].

Hvad de mange uoversatte Fagord angaar, har jeg derfor maattet ty til den udmærkede Kender af arabisk-matematiske Haandskrifter, Dr. *R. Besthorn*, der med vanlig Redebonhed ydede de, som man vil se, for Textens Forstaaelse uundværlige Oplysninger om de arabiske Laaneord.

De Afsnit, der vedrører Trigonometrien, bestaar i fire Kapitler[18], af hvilke de tre sidste følger efter hinanden. Det første bestaar i en Sinustavle med tilhørende Forklaring, de tre andre i en Skyggetavle (ɔ: en Cotangenttavle), der lærer at finde Solhøjden af Skyggens Længde og omvendt.

De vedkommende Kapitler lyder saaledes:

Inventio elgeib[20] [ɔ: sinus] per arcum et e converso.

Sciendum[a] autem in hoc loco est, quod[b] elgeib [ɔ: sinus] aliud planum[c],

At finde sinus ved Buen og omvendt.

Man maa nu her vide, at sinus dels er rectus dels versus. For et

[a] Sciendum] O, Sciens C. [b] quod] O, quia C. [c] planum] O, elmustewi C.

---

[16] Gedual el ichstimaat filcanum el magmoa = Columna conjunctionis canon (?) collectus. [17] Ældre end Athelards Oversættelse er dog Plato Tiburtinus' Aar 1116 fuldførte Oversættelse af Jøden Abraham bar Chija (Savasorda)'s Planimetri (liber embadorum), hvori der findes en Kordetavle. Se Abh. z. Gesch. d. math. Wissensch. XII (1902), S. 108. [18] Selve Værket begynder »Liber iste septem planetarum . . .« Kapitlerne er ikke numererede; de fire Kapitler. vi her omtaler, findes i Oxforderhaandskriftet (O) Blad 129 (Sinustavle med Forklaring) og 132^{v}—133^{r} (Cotangenttavle med Forklaringer), i Chartreshaandskriftet (C) henholdsvis Blad 71^{v}—72^{r} og Blad 75. I den følgende latinske Text betegner [ ] Udgiverens paa Dr. Besthorns Oplysninger grundede Oversættelser af de arabiske Laaneord, < > Indskud i Texten af Udgiveren, ( ) andre forklarende eller vejledende Bemærkninger. [20] »elgeib« med blødt g er en naturlig Transkription for en engelsk Oversætter. Ordet »el dschaib« betyder en Fold, Lomme, Bugt. Det stammer fra en arabisk Omskrivning af det indiske dschŷa eller dschîva, som betyder den halve Korde. Sinus er atter en direkte Oversættelse af dschaib.

aliud diminutum[a]. Cuiuslibet itaque loci elgeib [ɔ: sinus] planum hoc modo investigandum[b] est:

Per argumentum[21] enim praesens in semitas elgeib [ɔ: sinus] intrabitur, quodque illi[c] iunctum fuerit[d] notabitur. Quod si ipsum argumentum Dakaicae[22] [ɔ: minuta] comitantur, fiet item introitus secundus[e], gradu uno gradibus argumenti superaddito. Considerando itaque quomodo elgeib [ɔ: sinus] secundum ad primum se habeat, perspicuum[f] erit, quantum ex eo Dakaicis [ɔ: minutis] illis attineat. Quapropter si fuerit elgeib [ɔ: sinus] secundum maius primo, addendum erit ipsi[g] primo quantum illis Dakaicis [ɔ: minutis] accidit; si vero[h] minus, ab eodem secundum idem minuendum[i]; sicque erit elgeib [ɔ: sinus] quod quaeris inventum[j].

Si vero elgeib [ɔ: sinus] diminutum scire desideras, fueritque argumentum introducens nonaginta[k] gradibus minus, erit ipsum introducens a nonaginta minuendum, quodque residuum fuerit, quantum sit eius[l] elgeib [ɔ: sinus] <planum> captandum est, ipsumque a sexaginta minuendum. Quod itaque[m] inde restiterit, ipsum est quod quaeris.

vilkaarligt Sted maa da sinus rectus findes paa følgende Maade:

Med det foreliggende Argument gaar man ind i Sinuskolonnerne (skal være: Talkolonnerne, semitae numerorum), og hvad der svarer til det skrives op. Men hvis der hører Minutter til selve Argumentet, foretager man en ny Indgang efter at have lagt en Grad til Argumentets Grader. Ved saa at lægge Mærke til, hvorledes anden sinus forholder til første, bliver det klart, hvor meget af den der hører til de omtalte Minutter. Men naar anden sinus er større end første, saa skal der lægges til den første saa meget, som svarer til de omtalte Minutter; men er den mindre end den samme, skal det samme trækkes fra; og saaledes vil den sinus være fundet, som Du søger.

Men hvis Du ønsker at kende sinus versus, og det Argument, der gaas ind med, er mindre end 90 Grader, skal selve det, der gaas ind med, trækkes fra 90, og hvad der bliver Rest, saa meget som dens sinus <rectus> er, det skal man tage og trække fra 60. Hvad der saa derpaa bliver tilovers, det er netop det, Du søger.

[a] diminutum] O, elmaruz C. [b] investigandum] O, investigandus C. [c] quodque illi] O, eiusque C. [d] iunctum fuerit] O, adiunctum C. [e] secundus] C, secundi O. [f] perspicuum] O, perspiciendum C. [g] ipsi] C, om O. [h] si vero] O, sin autem C. [i] ab ... minuendum] O, ipsum ipsi detrahendum C. [j] erit ... inventum] O, elgeib quaesitum inventum erit C. [k] nonaginta] C, a nonaginta O. [l] eius] C, ei O. [m] itaque] O, autem C.

---

[21] Her forekommer Ordet Argument i dets moderne tekniske Betydning Tavleargument sikkert første Gang. [22] daqikq = $\frac{1}{60}$ af en Grad, et Minut.

Quod si[a] argumentum primum nonaginta gradibus maius fuerit, ipsis quidem nonaginta proprium elgeib [ɔ: sinus] planum[23] dabitur; residuo item, quod ei attinet, deinde ipsum attinens supra[b] sexaginta addendum[c], totumque istud[d] elgeib elmankuz[e 24] [ɔ: sinus diminutus] dicendum.

Non dissimili etiam[f] ratione ab elgeib[g] [ɔ: sinus] ad arcum converso gradu[h] pervenitur, ut in sequenti tabula subnotatur.

Quicunque autem astronomicae peritiam disciplinae affectat, hunc tractatum tota mentis intentione amplectatur.

Hinc etenim tam examinationis additio et subtractio quam argumentorum introductio, sed et ipsa locorum inventio ratione subnixa[i] est. Si quis autem in quaestionem duxerit, quare argumentis talibus talia elgeib [ɔ: sinus] asscribantur atque e converso, sciat, huius rationis causam ab elmagesti [ɔ: μεγαλῆ σύνταξις] Ptolomaei petendam esse.

Men hvis første Argument er større end 90 Grader, saa faar man for disse 90 Grader selve sinus rectus[23] og ligeledes for Resten det, der hører den til, og saa lægges denne tilhørende til 60, og det hele kaldes sinus versus[24].

Paa ganske lignende Maade kommer man fra Sinus til Buen ad den omvendte Vej, som det betegnes i den følgende Tavle.

Men hvem der tragter efter Kundskab i Astronomiens Lære, han lægge sig efter denne Behandlingsmaade med al sin Aands Kraft.

Thi paa den støtter sig fornuftmæssig ikke blot Undersøgelsens Addition og Subtraktion (ɔ: Interpolation?) og Argumenternes Indgang men ogsaa selve det at finde Stederne. Men om nogen giver sig til at spørge, hvorfor der tilskrives de og de Argumenter de og de Sinus'ser og omvendt, maa han vide, at Grunden til den Ting maa søges i Ptolemæus' den store [Syntaxis].

De tre andre trigonometriske Kapitler lyder:

Quomodo per artifa[25] [ɔ: altitudinem] solis cuiuslibet corporis umbra elmustewia[26] [ɔ: aequalis (= plana)] perpendatur.

Per artifa itaque, id est[j] diurnam altitudinem solis, in elgeib [ɔ: sinus]

Hvorledes et vilkaarligt Legemes plane Skygge (ɔ: Cotangens) faas af Solhøjden.

Med artifa, d. v. s. Solhøjden ved Dag, gaar man da ind til

[a] Quod si] O, Sin autem C. [b] supra] O, cum C. [c] addendum] O, coacervandum C. [d] istud] O, ipsum C. [e] elmankuz] O, elmankut C. [f] etiam] O, quoque C. [g] elgeib] C, om O. [h] converso gradu] O, e converso C. [i] subnixa] O, subjecta C. [j] id est] O, idem C.

[23] d. v. s. sinus totus = Radius. [24] el mankyz = den væltede, omvendte (ɔ: versus) eller = subtraheret, formindsket (ɔ: diminutus). [25] artifa' = Højde, Elevation. [26] el mustevia = ligestor (aequalis), her aabenbart = plan eller ret.

Tabula elgeib (Sinustavle). *)

Semitae numerorum (Talkolonnerne)								Elgeib (Sinus)		
s.	g.	s.	g.	s.	g.	s.	g.	Partitiones (Hele)	Dakaicae (Minutter)	Elgeniae[a] (Sekunder)
0	1	5	29	6	1	11	29	1	2	50
0	2	5	28	6	2	11	28	2	5	38
0	3	5	27	6	3	11	27	3	8	24
0	4	5	26	6	4	11	26	4	11	7
0	5	5	25	6	5	11	25	5	13	46
0	6	5	24	6	6	11	24	6	16	18
0	7	5	23	6	7	11	23	7	18	43
0	8	5	22	6	8	11	22	8	21	50[b]
0	9	5	21	6	9	11	21	9	23	9
0	10	5	20	6	10	11	20	10	25	8
0	11	5	19	6	11	11	19	11	26	54
0	12	5	18	6	12	11	18	12	28	29
0	13	5	17	6	13	11	17	13	29	49
0	14	5	16	6	14	11	16	14	30	35[c]
0	15	5	15	6	15	11	15	15	31	45
0	16	5	14	6	16	11	14	16	32	17
0	17	5	13	6	17	11	13	17	32	32
0	18	5	12	6	18	11	12	18	32	27
0	19	5	11	6	19	11	11	19	32	2
0	20	5	10	6	20	11	10	20	31	16
0	21	5	9	6	21	11	9	21	30	7
0	22	5	8	6	22	11	8	22	28	35
0	23	5	7	6	23	11	7	23	26	38
0	24	5	6	6	24	11	6	24	24	15
0	25	5	5	6	25	11	5	25	21	25
0	26	5	4	6	26	11	4	26	18	7
0	27	5	3	6	27	11	3	27	14	22
0	28	5	2	6	28	11	2	28	15[d]	6
0	29	5	1	6	29	11	1	29	5	19
1	0	5	0	7	0	11	0	30	0	0
1	1	4	29	7	1	10	29	30	54	8
1	2	4	28	7	2	10	28	31	47	43
1	3	4	27	7	3	10	27	32	40	41
1	4	4	26	7	4	10	26	33	38[e]	6
1	5	4	25	7	5	10	25	34	24	12[f]
1	6	4	24	7	6	10	24	35	16	2
1	7	4	23	7	7	10	23	36	6	32
1	8	4	22	7	8	10	22	36	56	23
1	9	4	21	7	9	10	21	37	45	33
1	10	4	20	7	10	10	20	38	34	2
1	11	4	19	7	11	10	19	39	21	49
1	12	4	18	7	12	10	18	40	8	52
1	13	4	17	7	13	10	17	40	55	12
1	14	4	16	7	14	10	16	41	40	6[g]
1	15	4	15	7	15	10	15	42	25	35

Semitae numerorum (Talkolonnerne)								Elgeib (Sinus)		
s.	g.	s.	g.	s.	g.	s.	g.	Partitiones (Hele)	Dakaicae (Minutter)	Elgeniae[a] (Sekunder)
1	16	4	14	7	16	10	14	43	9	37
1	17	4	13	7	17	10	13	43	52	52
1	18	4	12	7	18	10	12	44	35	19
1	19	4	11	7	19	10	11	45	16	37[h]
1	20	4	10	7	20	10	10	45	57	46
1	21	4	9	7	21	10	9	46	37	43
1	22	4	8	7	22	10	8	47	16	50
1	23	4	7	7	23	10	7	47	55	5
1	24	4	6	7	24	10	6	48	32	28
1	25	4	5	7	25	10	5	49	8	57
1	26	4	4	7	26	10	4	49	44	52[i]
1	27	4	3	7	27	10	3	50	19	13
1	28	4	2	7	28	10	2	50	52	58
1	29	4	1	7	29	10	1	51	25	48
2	0	4	0	8	0	10	0	51	57	41
2	1	3	29	8	1	9	29	52	28	38
2	2	3	28	8	2	9	28	52	38[k]	27[l]
2	3	3	27	8	3	9	27	53	27	37
2	4	3	26	8	4	9	26	53	55	40
2	5	3	25	8	5	9	25	54	22	42
2	6	3	24	8	6	9	24	54	48	46
2	7	3	23	8	7	9	23	55	13	49
2	8	3	22	8	8	9	22	55	38[m]	52
2	9	3	21	8	9	9	21	56	0	53
2	10	3	20	8	10	9	20	56	22	54
2	11	3	19	8	11	9	19	56	43	52
2	12	3	18	8	12	9	18	57	3	48
2	13	3	17	8	13	9	17	57	22	42
2	14	3	16	8	14	9	16	57	40	32
2	15	3	15	8	15	9	15	57	57	20
2	16	3	14	8	16	9	14	58	13	4
2	17	3	13	8	17	9	13	58	27	44
2	18	3	12	8	18	9	12	58	41	20
2	19	3	11	8	19	9	11	58	53	51
2	20	3	10	8	20	9	10	59	5	18
2	21	3	9	8	21	9	9	59	15	41
2	22	3	8	8	22	9	8	59	24	58
2	23	3	7	8	23	9	7	59	33	11
2	24	3	6	8	24	9	6	59	40	16
2	25	3	5	8	25	9	5	59	46	17[n]
2	26	3	4	8	26	9	4	59	51	14
2	27	3	3	8	27	9	3	59	55	4
2	28	3	2	8	28	9	2	59	57	49
2	29	3	1	8	29	9	1	59	59	27
3	0	3	0	9	0	9	0	60	0	0

[a] el tsaniet = Sekunder. [b] 50]2A. [c] 35]55A. [d] 15]10A. [e] 38]33A. [f] 12]53A. [g] 6]46A. [h] 37]58A. [i] 52]32A. [k] 38]58A. [l] 27]37A. [m] 38]37A. [n] 17]19A.

*) I denne Tavle fremstilles Sinus for Vinkler fra 1° til 360°. Cirklen deles i 12 Tegn (signa), hvert af disse i 30°. Radius deles i 60 Hele (Partitiones), hver af disse i 60 Minutter, og hvert Minut igen i 60 Sekunder. I Noterne angives de Værdier hos Al-Battânî (A), som afviger mere end 1″. Det er i alle disse Tilfælde Al-Battânî's Tavle, der svarer bedst til saavel den rigtige Værdi som Ptolemæus' Kordetavle. Ved Oversættelsen er der altsaa kommet en Del Fejl ind i Al-Chwârizmî's Tavler.

intrandum est[a], deinde ipsum artifa [ɔ: altitudo] a XC minuendum, quodque residuum fuerit, per ipsum in elgeib [ɔ: sinus] secundum introducamur[b]. Atque hoc idem[c] elgeib [ɔ: sinus] secundum in duodenarium ducatur, totaque summa[d] secundum elgeib [ɔ: sinus] primum dividatur. Quod si Dakaica [ɔ: minutum] interfuerit, ipsa ducatur in sexagenarium[e], quae summa item ut superior dividatur[f], diceturque huius dividentis[g] numerus aequalis numero digitorum corporis in umbra contentorum[h], quolibet corpore in XII digitos diviso[i].

Sinus'en, skal derpaa trække samme Højde fra 90, og hvad der bliver til Rest, med det føres vi ind i en anden Sinus. Og den samme anden Sinus multipliceres med 12, og hele Summen (ɔ: Produktet) divideres med første Sinus. Men hvis der er et Minut med, multipliceres dette med 60, hvilken Sum (ɔ: Produkt) ganske som den ovenfor divideres, og lad denne Delers (ɔ: Kvotients) Tal være lig Antallet af Fingre (ɔ: Hele), som indeholdes i Legemets Skygge, naar ethvert som helst Legeme er delt i 12 Fingre (ɔ: Hele).

Quomodo per umbram artifa [ɔ: altitudo] solis perpendatur.

Cum autem per umbram artifa [ɔ: altitudinem] investigaveris[j], umbra quidem in se ipsam ducenda erit, atque inde producto CXLIV addenda sunt[k], totiusque[l] summae elgidher[27][m], id est quadrati latus [ɔ: radix], notabitur, eritque hoc elgidher[n] [ɔ: radix] huius ipsius umbrae diametros. Deinde vero umbra ipsa in LX ducenda erit, atque inde productum secundum diametrum praedictam[o] dividendum, dividentisque[p] arcus

Hvorledes Solhøjden faas af Skyggen.

Men naar man vil udfinde Højden ved Skyggen, saa skal Skyggen multipliceres med sig selv, og til Produktet deraf skal der lægges 144, og elgidher, d. v. s. Kvadratroden af hele Summen skrives op, og da vil denne Kvadratrod være Diametren for denne samme Skygge. Men derpaa skal selve Skyggen multipliceres med 60, og Produktet deraf divideres med ovennævnte Diameter, og Delerens (ɔ: Kvotientens) Bue findes, og den

[a] est] C, om O. [b] introducamur] O, intretur C. [c] Atque hoc idem] O, Postea vero ipsum C. [d] totaque summa] O, denique ipsum productum C. [e] sexagenarium] O, IX C. [f] dividatur] C, ducatur O. [g] diceturque huius dividentis] diceturque huius * * * O, Huius itaque partitionis unius dividentis C. [h] in umbra contentorum] O, umbram numerantium divisio C. [i] digitos diviso] O, aequales partes quae digiti nuncupantur C. [j] investigaveris] O, investigaveritis C. [k] sunt], O, erit itaque C. [l] totiusque] O, totius C. [m] elgidher] C, elgider O. [n] id est ... huius] O, om C. [o] praedictam] C, praedictum O. [p] dividentisque] O, dividentis demum C.

[27] el dschidr = Kvadratrod (radix); quadrati latus maa altsaa betragtes som et mislykket Forsøg paa en Oversættelse.

inveniendus, arcusque inventus[a] a XC subtrahendus. Residuum igitur artifa [ɔ: altitudinem] quod quaeris[b] ostendet.

fundne Bue trækkes fra 90. Resten vil da vise den Højde, som søges.

Quomodo per artifa [ɔ: altitudinem] solis umbra elmankyz[c] [ɔ: versa] perpendatur.

Per ipsum itaque[d] artifa [ɔ: altitudinem] in semitam elgeib [ɔ: sinus] introduceris. Itemque artifa [ɔ: altitudo] idem[e] a XC subtrahetur[f], atque per residuum in semitam elgeib [ɔ: sinus] item[g] intrabitur[h]. Deinde elgeib [ɔ: sinus] primum in duodenarium ducetur, atque inde productum secundum[i] elgeib [ɔ: sinum] secundum dividetur[j]. Quod si dakaicae [ɔ: minuta] interfuerint, ipsae in sexagenarium ducentur[k], cuius summa, ut supra dicta, dividetur[l]; sicque in dividente habebimus et digitos et dakaicas [ɔ: minuta] umbram elmancyz [ɔ: versam] significantes[m].

Introitus itaque in tabulam[n] umbrarum subscriptam hic est; per quodlibet enim solis[o] artifa [ɔ: altitudinem] in tabulam ipsam[p] introductis[q] adiunctum illius umbram ostendet[r].

Hvorledes den oprette Skygge (ɔ: Tangens) faas af Solhøjden.

Med selve Højden bliver Du da ført ind i Sinuskolonnen, og saa trækkes den samme Højde fra 90, og med Resten gaas der atter ind i Sinuskolonnen. Derpaa multipliceres første Sinus med 12, og Produktet deraf divideres med anden Sinus. Men hvis der er Minutter med, multipliceres disse med 60, og Summen (ɔ: Produktet) deraf divideres som den ovenfor nævnte; og saaledes vil vi i Deleren (ɔ: Kvotienten) faa baade Fingre (ɔ: Hele) og Minutter, som udtrykker den oprette Skygge.

Dette er da Indgangen i den nedenfor anførte Skyggetavle; thi ved en hvilkensomhelst Solhøjde, som man gaar ind med i denne Tavle, vil det, der staar hos, vise dens Skygge.

[a] inventus] O, ipse C. [b] quod quaeris] O, quaesitum C. [c] elmankyz] O, elmakuz C. [d] itaque] C, om O. [e] idem] C, ipsum O. [f] subtrahetur] O, subtrahes C. [g] item] O, secundi C. [h] intrabitur] O, intrabis C. [i] secundum] C, supra O. [j] dividetur] O, dividatur C. [k] ducentur] O, ducantur C. [l] cuius ... dividetur] O, indeque productum sicut praedictum dividatur C. [m] habebimus ... significantes] O, umbrae mensuram reperies C. [n] tabulam] C, paginam O. [o] solis] C, om O. [p] ipsam] C, om O. [q] introductis] O, introductus C. [r] adiunctum ... ostendet] O, umbrae quantitatem invenies adiunctum.

Gedual ad hel[a] — **Tabula umbrarum** (Skyggetavle).*)

Numerus ipsius artifa (Højdetal)	Umbra (Skygge)		Numerus ipsius artifa (Højdetal)	Umbra (Skygge)		Numerus ipsius artifa (Højdetal)	Umbra (Skygge)	
	Digiti (Hele)	Dakaicae (Minutter)		Digiti (Hele)	Dakaicae (Minutter)		Digiti (Hele)	Dakaicae (Minutter)
1	687	23[b]	31	19	58	61	6	39
2	383[c]	38	32	19	13	62	6	24
3	273[d]	47[e]	33	18	23[p]	63	6	7
4	181[f]	36	34	17	47	64	5	51
5	158[g]	25[h]	35	17	6[q]	65	5	26[u]
6	114	10	36	16	30	66	5	21
7	97	44	37	15	55	67	5	4[v]
8	85	22	38	15	21	68	4	51
9	75	45	39	14	58[r]	69	4	36
10	68	34[i]	40	14	18	70	4	22
11	61	44	41	13	48	71	4	9
12	56	27	42	13	18[s]	72	3	54
13	51	58	43	12	52	73	3	40
14	48	9	44	12	25	74	3	26
15	44	47	45	12	0	75	3	13
16	41	51	46	11	35	76	2	59
17	39	15	47	11	11	77	2	46
18	36	55	48	10	48	78	2	32
19	34	45[k]	49	10	25	79	2	19
20	32	52[l]	50	10	4	80	2	6
21	31	15	51	9	43	81	1	54
22	29	45[m]	52	9	22	82	1	41
23	28	16	53	9	2	83	1	28
24	26	55[n]	54	8	44	84	1	15
25	25	44	55	8	24	85	1	2
26	24	36	56	8	5	86	0	50
27	23	33	57	7	47	87	0	37
28	22	34	58	7	29	88	0	25
29	21	47[o]	59	7	22[t]	89	0	52[x]
30	20	47	60	6	55	90	0	0

[a] Denne arabiske Tavleoverskrift findes kun i Chartreshaandskriftet (C). [b] 23]29A 26H. [c] 383]O 388C 343A 342H. [d] 273]O 243C 228AH. [e] 47]58A 18H. [f] 181]171AH. [g] 158]137AH. [h] 25]10A3H. [i] 34]3AH. [k] 45]51AH. [l] 52]58AH. [m] 45]42AH. [n] 55]57A56H. [o] 47]40A39H. [p] 23]29A28H. [q] 6]8AH. [r] 58]49AH. [s] 18]20AH. [t] 22]13AH. [u] 26]36AH. [v] 4]6AH. [x] 52]12A13H.

*) I denne Tavle fremstilles Skyggen som Funktion af Solhøjden. Tavlen er altsaa en Cotangenttavle for Vinkler fra 1° til 90° med Intervaller paa 1°. Skyggegiveren tænkes delt i 12 Hele; paa hver af disse Hele gaar 60 Minutter. I Noterne angives foruden O (Oxforderhaandskriftet) og C (Chartreshaandskriftet) de Værdier hos Al-Battânî (A) og Abû'l Ali Hassan fra Marokko (H), som afviger mere end 1′ fra den herværende Tavle, der ligesom Sinustavlen har lidt en Del ved Oversættelsen.

Som man ser, gaar Al-Chwârizmî's Sinustavle til 360°, men medtager kun hele Grader. Som Enhed for Cirkeldelingen benyttes Dyretegnet (signum) = $\frac{1}{12}$ af Omkredsen, medens Graden = $\frac{1}{30}$ Tegn kun er sekundær Enhed. Til en og samme Sinusværdi svarer 4 Buelængder, hver sluttende i sin Kvadrant og med Endepunkterne symmetrisk m. H. t. de to Hovedaxer. Sinus'erne beregnes i Hele, $\frac{1}{60}$- og $\frac{1}{60^2}$-Dele, og Radius er sat = 60, altsaa et gennemført Sexagesimalsystem.

Mulige Forbilleder for denne den ældste af os kendte arabiske Sinustavle maa søges i den græske eller indiske Litteratur. Fra Grækerne er der som bekendt kun opbevaret os en enkelt trigonometrisk Tavle, en Kordetavle, som findes hos Ptolemæus. Den gaar med Mellemrum paa $\frac{1}{2}$° til 180°, hvilket svarer til en Sinustavle, der med Mellemrum paa $\frac{1}{4}$° gaar til 90° (crd. $2x = 2 \sin x$); Ptolemæus' Tavle giver altsaa 4 Gange saa mange Værdier som Al-Chwârizmî's[28].

I den indiske Litteratur findes imidlertid Sinustavler, som i de os kendte Værker første Gang forekommer hos Aryabhata (* 476 e. C. F.) i hans to Bøger Aryabatîyam og Sûrya Siddhânta. De gaar med Mellemrum paa $3\frac{3}{4}$° til 90°, sætter Radius = 3438 og svarer altsaa til en Inddeling af Periferien i 96 Dele, saa at Ptolemæus' Kordetavle har 15 Gange saa mange Værdier som den indiske Tavle[29]. I nyere indiske Sinustavler sættes Radius = 60[30], men dette skyldes sikkert græsk Indflydelse, og det samme er ogsaa Tilfældet med de yngre indiske Forfattere, som giver Regler for Beregning af Tavler med Mellemrum paa 1°[31].

At Al-Chwârizmî har kendt en indisk Sinustavle er rimeligt; thi den arabiske Astronom Ibn Al-Adamî (ca. 900) siger, at i Aaret 773 kom til Kaliffen Al-Mansûr en Mand, som var særlig kyndig i den under Navnet Sindhind bekendte Regning, og som kendte Metoder til at løse de Ligninger, hvoraf man fandt enhver kardadja (ɔ: kramadjyâ = sinus rectus) fra $\frac{1}{2}$° til $\frac{1}{2}$°. Al-Mansûr lod Bogen oversætte og betroede Mohammed ben Ibrâhîm Al-Fazârî at lave et Værk derefter til Hjælp ved Planetberegninger; Værket kaldtes senere den store Sindhind og blev brugt til Kaliffen Al-Mamûns Tid; men for ham udar-

[28] Se Claudii Ptolemaei Syntaxis mathematica, ed. Heiberg, I, S. 48—63. — sl. *Zeuthen*, Mathematikens Historie I, S. 202—03. — *Braunmühl*, Geschichte der Trigonometrie I, S. 19—22. [29] Aftrykt hos Braunmühl, l. c. S. 34. [30] Varâha-Mihira, Pañchasîddhânticâ ed. G. Thibaut, Benares 1889. Sl. Braunmühl, l. c. S. 32 og 35. [31] Bhâskara, Siddhânta-Çiromâni, ed. Wilkinson, S. 263—68. Sl. Braunmühl, l. c. S. 37.

bejdede Al-Chwârizmî et Udtog, hvis Tavler blev berømt i hele Islam[32].

Det indiske Værk, her er Tale om, er muligvis Brahmagupta's Aar 628 skrevne Siddhânta[33], hvis astronomiske Del endnu ikke er publiceret; men efter alt at dømme har der deri været optaget en Sinustavle med Mellemrum paa $\frac{1}{2}^0$. Før man faar at vide, hvordan denne saa ud, vil man ikke kunne afgøre, om det virkelig er Al-Chwârizmî, der har indført den Form for Sinustavler, der skulde blive gængse i den arabiske og europæiske Litteratur lige op til Renæssancens Tid, eller om han har taget sin Tavle lige fra Brahmagupta's Astronomi, maaske blot med den Simplifikation, at han tog Mellemrum paa 1^0 i Stedet for paa $\frac{1}{2}^0$, medens Al-Battânî atter gik op til Intervaller paa $\frac{1}{2}^0$[34].

Det eneste sikre er, at saavel Al-Chwârizmî's som Al-Battânî's Sinustavler er direkte Affødninger af Ptolemæus' Kordetavle.

I Følge Formlen $\frac{1}{2} \text{ crd } x = \sin \frac{x}{2}$ lader en Kordetavle sig jo omdanne til en Sinustavle, ved at alle Tavlens Tal halveres, og naar Al-Chwârizmî i Forklaringen til sin Sinustavle bemærker, at den til Grund for Beregningen liggende Teori maa søges i Ptolemæus' Almagest, saa vækker dette selvfølgelig strax den Mistanke, at Al-Chwârizmî's Tavle er fremkommet ved at halvere hver fjerde Linie i Ptolemæus' Kordetavle, Al-Battânî's derimod ved at halvere hver anden. Alle tre Tavler sætter jo $r = 60$ og bruger Sexagesimalbrøker[35].

Regner man efter, bekræftes Mistanken til Fuldkommenhed. Den halverede Ptolemæus-Tavle og de to arabiske Tavler stemmer ganske paa nær Afvigelser paa 1 i sidste Ciffer af $\frac{1}{60^2}$-Delene. I saadanne Tilfælde er det regelmæssig Al-Battânî's Tavle, der svarer bedst til Ptolemæus', medens Al-Chwârizmî af en eller anden Grund har faaet en lille Forskel. Afvigelserne paa 1 i sidste Ciffer mellem Al-Chwârizmî og Al-Battânî, som man vedblivende kan konstatere, beror simpelthen

[32] Braunmühl, l. c. S. 44. — Denne Beretning viser, at Al-Chwârizmî's Laan muligvis ikke er direkte, men at han blot har forkortet og forbedret et nu helt ukendt Værk (Oversættelse) af Al-Fazârî. [33] Siddhânta = astronomisk Lærebog. Sl. *Wøpcke* i Journal asiatique I_6, 1863. — Braunmühl, l. c. S. 45. [34] Al-Battânî, Opus astronomicum, ed. Nallino II, S. 55—56. [35]) Ptolemæus' Almagest blev allerede oversat paa Harun Al-Raschid's Tid (8. Aarhundrede), men ca. 820—30, omtrent ved den Tid, Al-Chwârizmî døde, foretoges en ny Oversættelse, da den første var ret mislykket. Se *Steinschneider* i Zeitschr. d. deutsch. Morgenländ. Gesellsch. 50, S. 200.

paa, at den sidste efter Halveringen forhøjer, medens den første kaster Resten bort.

Hermed er al Tale om en selvstændig Beregning af Sinustavler hos de ældste arabiske Forfattere ude af Verden, og det er bedst med det samme at tilføje, at mange af de yngre arabiske Astronomer blev staaende ved de samme Tavler, som Al-Battânî og Al-Chwârizmî lod sig nøje med — Al-Zarkâli[36] (ca. 1080) er den mest berømte af dem — eller de tog som Abû'l Hasan Ali fra Marokko[37] (13. Aarh.) alle Værdierne i Ptolemæus' Kordetavle med og naaede derved til en Sinustavle med Mellemrum paa $\frac{1}{4}{}^{0}$, som helt erstattede Ptolemæus' Tavle.

Allerede i 10. Aarhundrede havde dog Abû'l Wafâ (940—98) forbedret Ptolemæus' Tavle ved at gaa ned til $\frac{1}{60^5}$-Delene, men videre naaede de arabiske Forfattere ikke, før Ulûg-Beg[39] (1393—1449) beregnede en Tavle med Mellemrum paa 1'.

Hvis det bekræfter sig, hvad man mener at have fundet Spor til, at de indiske Sinustavler er af græsk Oprindelse, og at saadanne græske Sinustavler skulde være fremkommet i det 3—4. Aarh. e. C. F.[40], vil Resultatet blive, at der i hele Middelalderen kun er to Mænd, der har ført Sinustavleberegningerne et Skridt ud over det, Grækerne præsterede, nemlig Abû'l Wafâ i det 10. og Ulûg-Beg i det 15. Aarh. Men med den sidstnævnte er vi allerede helt oppe ved den Tid, da den europæiske Renæssances Mænd for Alvor tog fat paa Sinustavlernes Forbedring, idet Johann von Gmunden, Peurbach, Bianchini og Regiomontanus netop ved den Tid reformerede Trigonometrien.

Det er imidlertid muligt, at Al-Chwârizmî paa en eller anden Maade har ydet andre Bidrag til Trigonometrien, end vi kan se af det ovenfor aftrykte Udtog af Athelards Oversættelse. I et hidtil ukendt Florentiner-Haandskrift fra ca. 1300[41] findes nemlig en Mængde Tavler oversat fra Arabisk paa Latin, der for en Del falder sammen med Gerhard af Cremonas Tavler i Oxford[42] og ligesom disse henføres saavel til

[36] Se *Steinschneider*, Études sur Zarkali i Bullettino Boncompagni XIV, S. 174 ff, og *Curtze* i Bibliotheca Mathematica 1_3 (1900), S. 337 ff. — Al-Zarkâli's Tavler findes i talrige uudgivne latinske Haandskrifter. [37] Aboul Hhassan Ali de Maroc, Traité des Instruments astronomiques, ed. Sédillot, Paris 1834, I—II (se særligt I, cap. 10 & 15—20). [38] Se Abû'l Wafâ's Almagest i Uddrag af Carra de Vaux i Journal asiatique 19_8 (1892), S. 408—71. [39] Prolégomènes des tables Astronomiques d'Oloug-Beg, ed Sédillot, Paris 1847—53. [40] Se *Hultsch* i Weltall 2 (Heft 4), Berlin 1901, S. 48—55 & i Abh. z. Gesch. d. math. Wissensch. IX, S. 208—09 & i Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1894, S. 167—69. [41] Cod. S. Marci Florent. 189 (nu Conv. soppr. J. V. 6) i Biblioteca Nazionale i Firenze. [42] Cod. Canon. Misc. 51 (14. Aarh.) og Laud. Misc. 644 (13. Aarh.) i Bodleian Library i Oxford.

Toledo som Cremona, og her findes ogsaa to Sinustavler. Den første af dem er identisk med Al-Battânîs og henføres — sikkert med Rette — til Al-Zarkâli, hvis Tavler dannede Grundlaget for Gerhard af Cremonas. Den anden derimod er en kombineret Sinus- og Deklinationstavle, hvor $r = 150$, og hvor Argumenterne gaar med Mellemrum paa 1^0 til 6^s0^0 og tilbage fra 6^s0^0 til 11^s29^0, d.v.s. 359^0. Deklinationerne beregnes efter Ptolemæus, og om hele Tavlen hedder det: »Ista tabula est **Algorismus,** in qua diameter dividitur in 300 divisiones.« Ordet Algorismus maa her som saa mange andre Steder i de latinske Oversættelser forstaas som Al-Chwârizmî og ikke som Algorisme, hvad der heller ingen Mening vilde give[43].

Vi kan her tilføje, at ved den Sinustavle, som henføres til Al-Zarkâli, finder man i det samme Florentiner-Haandskrift de arabiske Betegnelser »Elgeb ɔ: sinus, Elmusteva ɔ: sinus aequalis, Elmaruz ɔ: sinus versa« som en Randbemærkning, og den selv samme Tavle kaldes i et andet Florentiner-Haandskrift[44] »tabula alleib«, og her kaldes sinus rectus »alleib rectum«. Den arabiske Betegnelse vedblev altsaa at existere hist og her, ogsaa efter at Ordet sinus var trængt igennem.

Endnu et Sted omtales der, som Braunmühl[45] gør opmærksom paa, trigonometriske Tavler, der, saa vidt man kan se, tillægges Al-Chwârizmî. Hos den nævnte Abû'l Hassan Ali fra Marokko findes der nemlig en Arcsinustavle, hvor $r = 60$, og hvor der i Grader og Minutter angives Buer, der svarer til $\frac{1}{240}$-Dele af denne Radius, d. v. s. Intervallerne er i Følge det anvendte Sexagesimalsystem paa $15'$. Om denne Tavle staar der, at saadanne Buetavler er kendt under Navnet »Tabulae sinus Rhhouarzemie«, hvilket maaske betyder, at Al-Chwârizmî har indført Arcsinustavlerne i den arabiske Litteratur. At ingen saadan Tavle findes hos Athelard er ikke noget Bevis derimod; thi dels er det ikke helt ualmindeligt, at Arabernes Værker foreligger i omtrent lige saa mange fra hinanden afvigende Redaktioner som der er Afskrifter af dem, dels er der den Mærkelighed ved Athelards Sinustavle, at Kapiteloverskriften hedder »Inventio elgeib per arcum et e converso«, medens Kapitlet reelt kun handler om at finde sinus (elgeib) ved Buen, men ikke gør Rede for den omvendte Operation. Der er da ingen Urimelighed i at antage, at Athelard har leveret en de-

[43] Se *Steinschneider*, Hebräische Übersetzungen, S. 633. — Trattati d'aritmetica pubbl. da B Boncompagni, Roma 1857, S. 1 & 25. — *Heiberg* i Abh. z. Gesch. d. Math. V, S. 5. [44] Cod. S. Marci Flor. 191 (Conv. soppr. J. V. 5) fra ca. Aar 1300. [45] *Braunmühl,* l. c. S. 49 & 84.

fekt Oversættelse eller, hvad der er nok saa sandsynligt, har oversat efter et defekt Haandskrift; thi det hændte ogsaa, at de arabiske Afskrivere snød og sprang Kapitlernes sidste Halvdel over.

Er Al-Chwârizmî's Sinustavle paaviseligt en Omarbejdelse af en flere hundrede Aar ældre Kordetavle, saa er til Gengæld Skyggetavlen den ældste os opbevarede trigonometriske Tavle over andre Funktioner end sinus — eller den dermed synonyme Korde — og sinus versus. Ganske vist tyder Tolvdelingen af den Skyggegiver (Gnomon), som hjælper til at finde Solhøjden, paa indisk Oprindelse, men endnu er der ingen saadan Cotangenttavle fremdraget, hverken i den indiske eller arabiske Litteratur før Al-Chwârizmî. Derimod fremkom en lignende Tavle for faa Aar siden, da Al-Battânî's[46] Astronomi blev udgivet i sin Helhed; men allerede tidligere var en saadan kendt fra Johannes de Lineriis' »Canones super tabulas primi mobilis«, som blev forfattet i Paris 1322[47] og hvor baade Al-Battânî's Sinustavle og Skyggetavlen gaar igen som i saa mange andre middelalderlige latinske Haandskrifter, der endnu ligger uundersøgte hen.

Medens Interpolationsmetoden, som Al-Chwârizmî fremstiller til Brug ved Sinustavlen, ingen nøjere Forklaring kræver, maa det nævnes, at de Metoder, der angives, naar man skal finde den plane Skygge (Cotangens) af Solhøjden, og omvendt, samt den oprette Skygge (Tangens) af Solhøjden, aabenbart ikke gaar ud paa en Anvendelse af Cotangenttavlen, som følger lige efter, men derimod af Sinustavlen. Cotangenttavlen fremtræder altsaa som et Resultat af en ved Sinustavlen udført Beregning, og vel at mærke en Beregning, som naturligst maatte være at foretage netop ved en Cotangenttavle.

Det, der læres, er jo at finde 1) Den plane Skygge u af Solhøjden φ ved Formlen $u = 12 \,.\, \sin(90^0 - \varphi) : \sin\varphi = 12 \cot\varphi$; 2) Solhøjden φ af den plane Skygge u ved Formlen $\varphi = 90^0 - \operatorname{arc\,sin} \frac{60u}{\sqrt{u^2 + 12^2}}$; 3) Den oprette Skygge (Tangens) u_1 af Solhøjden φ ved Formlen $u_1 = 12 \,.\, \sin\varphi : \sin(90^0 - \varphi) = 12 \operatorname{tg}\varphi$.

Man savner her en Tangenttavle ligesom man ovenfor savnede en Arcsinustavle, og det er tydeligt, at en Arccotangenttavle vilde være

[46] Al-Battânî, Opus astronomicum, ed. Nallino, II, S. 60. [47] Udgivet blev disse Tavler af *Curtze* i Bibliotheca mathematica I_3 (1900), S. 411—12.

paa sin Plads ved den midterste af de tre Opgavers Løsning. Saadanne Tavler finder man hos yngre arabiske Forfattere. Allerede Abû'l Wafâ beregner en Tangenttavle med Intervaller paa 15′ og med Værdier baade for Radius = 60 og = 1. Hos Ali Hassan fra Marokko findes der en Arccotangenttavle med Vinkelværdier for Cotangenter paa fra 1 til 140 Digiti (Hele), og samtidig udvides Cotangenttavlen ligesom Tangenttavlen hos Abû'l Wafâ til Intervaller paa 15′. Det ser derfor ud, som om vi hos Al-Chwârizmî træffer det første famlende Forsøg paa ved en Opgave, hvor de tangentielle Funktioner var de naturligt anvendelige, at skaffe sig tabellariske Midler til at komme udenom de i dette Tilfælde tungt anvendelige Sinustavler. Det er muligt, at det er fordi Al-Chwârizmî's Værk er en forkortet Bearbejdelse af et oprindeligt indisk Arbejde, at det har et saa ufærdigt og mangelfuldt Præg; det er heller ikke udelukket, at Skylden herfor ligger i en slet Overlevering eller en fragmentarisk Oversættelse; men det sandsynligste er dog vel, at det torsoagtige, der er ved Bogens trigonometriske Afsnit, i alt Fald for en væsentlig Del har sin Aarsag i, **at vi her ser de tangentielle trigonometriske Funktioner og de tilhørende Tavler in statu nascendi.**

Det er sikkert nok, at de Regnemetoder, der hos Al-Chwârizmî benyttes til at finde Solhøjden af Skyggen og omvendt, fandtes hos Inderne[48]; Skyggetavlen derimod, som maaske ogsaa er indisk, møder os første Gang hos Al-Chwârizmî. Men det er tydeligt nok, at i det Øjeblik man finder paa at beregne en saadan Skyggetavle, **gør man det første om end ubevidste Skridt hen mod Opstillingen af de to tangentielle Funktioner,** medens man, før man finder paa Skyggetavlen, simpelthen løser et astronomisk Problem ad ren sinus-trigonometrisk Vej.

Baade hos Grækerne og Inderne finder vi mange astronomiske Opgaver, som naturligst og lettest løses ved Hjælp af Tangent- eller Cotangenttavler, behandlede, hos Grækerne ved Hjælp af Kordetavle alene, hos Inderne ved Hjælp af Sinus- og Sinusversustavler[49]. Ogsaa Forholdet mellem Skygge og Solhøjde er blevet behandlet trigonometrisk af Grækerne, muligvis allerede af Apollonius, rimeligvis af Hipparch og sikkert af Ptolemæus[50] — men kun ved Hjælp af Kordetavler.

Denne historiske Udvikling bringer Al-Chwârizmî til stadigvæk at

[48] Se Sûrya-Siddhânta, ed. Burgess, i Journal of the American oriental Society VI, New-Haven 1860, Kap. III, Vers 13—14. Sl. Braunmühl, l. c. S. 51. [49] Se f. Ex. Ptolemæus' Syntaxis I, cap. 16; II, cap. 3, 7, 10, 12. [50] Ibid. II, cap. 5.

løse de med Skygge og Solhøjde forbundne Opgaver ved Hjælp af Sinustavlerne, som vedblivende var de eneste trigonometriske Tavler, samtidig med at han opstiller en astronomisk Tavle som Resultat af en af disse Opgavers Løsning for hver Grad, og vel at mærke en Tavle, der overflødiggør den af ham selv anbefalede Metode til Opgavens Løsning. At Tavlen har en almindelig trigonometrisk Anvendelse, er vel overhovedet ikke gaaet op for Al-Chwârizmî.

Forfølger vi Udviklingen videre, ser vi, at Al-Battânî er kommet et godt Stykke videre. Han giver nemlig først de gamle Regler, omtrent som Al-Chwârizmî, derpaa siger han: »Men hvis Du ønsker at finde en hvilkensomhelst Skygge ved Hjælp af Tavlen, saa . . .« og derpaa giver han Regler for Tavlens Benyttelse til at finde ikke blot begge Skyggerne af Solhøjden, men ogsaa Solhøjden ved Skyggerne. For ham er Skyggetavlen altsaa blevet et bevidst Middel, som han udnytter saa intensivt, at han bruger det, som er en Cotangenttavle, ogsaa som Tangenttavle, Arctangenttavle og Arccotangenttavle. Men han vedbliver at slæbe alt det gamle med, og beholder den meget upraktiske Inddeling af Skyggegiver i 12 Dele, Radius i 60, som tvinger til at regne med ligedannede Trekanter og komplicerer Udregningerne paa en ganske meningsløs Maade.

Abû'l Wafâ endelig gjorde det sidste — og største Skridt. Han kastede baade den græske 60-Deling og den indiske 12-Deling over Bord, satte Radius lig 1, gjorde uden at forandre Navnene den plane Skygge til det, vi forstaar ved Cotangens, den oprette til det, vi forstaar ved Tangens, og afsluttede dermed de tangentielle Funktioners Udviklingshistorie — i første Omgang. Thi det var ikke Abû'l Wafâ's Værk, men Al-Battânî's og Al-Chwârizmî's, der naaede til Spanien og videre rundt i Europa; og der gik 7—800 Aar, før man her naaede et trigonometrisk System, der stod paa Højde med Abû'l Wafâ's[51].

[51] Se Braunmühl, l. c. S. 51—52 & 57—58.

Studiet af Euclids Elementer i Danmark.

Af **S. A. Christensen.**

Stillingen til Euclids Elementer indenfor den danske Matematik har i Tidernes Løb været en dobbelt. Indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede dannede de Grundlaget for Matematikundervisningen herhjemme, hvorfra man dog lidt efter lidt emanciperede sig, saaledes at omtrent ved Overgangen til det 19de Aarhundrede forsvinder Euclid fra Undervisningen. Først i Slutningen af Aarhundredet kommer hans Elementer til at spille en Rolle igen, men nu som Grundlag for det matematisk-historiske Studium. At tale om Studium af Matematik herhjemme før Universitetets Oprettelse vilde være urimeligt, og end ikke straks fik Matematik Plads blandt Lærefagene ved Højskolen; først ved den nye Ordning efter Reformationen kom Matematiken med, hvilket skyldtes den daværende Rektor — *Chr. Torkildsen Morsing* —, der interesserede sig for dette Fag. Den matematiske Professor blev den øverste indenfor det filosofiske Fakultet; men naturligvis var Forelæsningernes Indhold det rent elementære; man maa erindre, at først i det 17de Aarhundrede kom Matematik ind i Skolerne, saa Universitetet havde intet at bygge paa. Først efter Indførelsen af anden Eksamen fik Matematiken nogen egentlig Betydning ved Universitetet, thi kun enkelte kastede sig over Faget for at tage Baccalaurgraden eller Magistergraden. Universitetets fornemste Opgave den Gang var at uddanne Teologer. Endnu ringere end ved Universitetet var Stillingen i Skolerne, hvor Matematiken, da den indførtes som Undervisningsfag, kun læstes i ringe Omfang, og dog blev det ved Skoleordningen af 1775 skudt ud af Skolerne igen, indtil der i 1797 blev indført en ny Ordning, hvorved Matematik fik en mere fremskudt Plads. Paa Grundlag af denne Ordning er Udviklingen fortsat i det

19de Aarhundrede; kun 1871 gør en væsentlig Forandring, i visse Retninger til Skade for Fagets Stilling i Skolen, men dette er igen ændret ved Almenskoleloven af 1903, saaledes at nu ingen bliver Student uden til det sidste at have haft Undervisning i Matematik, hvorved de faar det fulde Udbytte af Matematikundervisningen.

[Om de vekslende Fordringer i Matematik ved Skolerne og Universitetet før det 19de Aarh. se S. A. Christensen: Matematikens Udvikling i Danmark og Norge i det XVIII Aarh. Odense 1895. 8vo].

Om Forelæsningerne over Matematik i ældre Tid er at bemærke, at disse omfattede Euclids Elementer, særlig da de 6 første Bøger, noget Aritmetik og Algebra, Trigonometri og Astronomi, og man finder i de opbevarede Forelæsningskataloger, at Th. Fincke, Longomontanus, Jacob Fincke, C. O. Torm, From og Lange i det 17de Aarhundrede, Anchersen, Ramus, Ziegenbalg, P. Horrebow jun., Hee og Geuss i det 18de Aarhundrede har læst over Euclids Elementer. Samlingen af Forelæsningskataloger er ufuldstændig, særlig for det 17de Aarh.; i det 19de Aarh. findes ingen Forelæsninger af denne Art, og man finder, at allerede i det 18de Aarh. holdes elementære matematiske Forelæsninger over andre Systemer end Euclids, hvorfra man efterhaanden fjerner sig.

Matematikundervisningen i ældre Tider er egentlig identificeret med Geometriundervisning, medens Aritmetik og Algebra (Bogstavregning og lidt Løsning af Ligninger) er henlagt til Regneundervisningen, og da tilmed det Pensum, hvortil Skoleundervisningen var indskrænket inden Midten af det 18de Aarh., ikke gik ud over Euclids 1ste Bog, er det forstaaeligt, at man kun finder faa Bøger særlig lagt an paa denne Undervisning, og for den følgende Tids Vedkommende træffer man heller ikke noget stort Antal danske Lærebøger før end i det 19de Aarh., hvor Systemerne ikke slutter sig til Euclid.

De ældste Skolebøger skyldes *Hans Poulsen Resen*. Han skrev en lille Aritmetik og en lille Geometri for sine Elever paa sine Rejser, den første i Rostock 1593—94, den anden i Wittenberg 1587. Selv udgav han dem ikke, men lod et Par Elever besørge Arbejdet. De passer til Fordringerne i Anordningen angaaende Skolerne af 1604, hvortil han er Ophavsmanden. Titlerne er »Scholia succincta et facilia in Arithmeticam Gemmae Frisii tradita et conscripta olim, in schola privata a J P Resenio, et nunc tandem edita in usum scholarum puerilium etc. per Peter Nicol. Gelstrupium«. Wittebergae 1611. 8vo, og »Initia geometrica seu in Euclidem isagoge compendiosa. Una cum logistica astronomica brevissima. Tradita olim in schola privata a

J P Resenio. Et nunc edita pro junioribus a Joh. Christoph Knopfio«. Wittebergae 1612. 8vo.

Den første er i langt højere Grad, end Titlen lader formode, en Kommentar til Euclids VII—IX Bog, medens den anden væsentlig indeholder Kommentar til I og Dele af II Bog svarende til Fordringerne [De er begge nærmere omtalt i min ovenciterede Afhandling].

Det betydeligste Arbejde fra ældre Tid skyldes den yngre Dybvad, *Christopher Dybvad,* Søn af den bekendte Professor Jørgen Chr. Dybvad. Det er en Samling af 4 Bøger, der dels indeholder en Oversættelse af Euclid I—X Bog og dels Kommentarer dertil. De fører Titlerne: »C Dibvadii in geometriam Euclidis prioribus sex Elementorum libris comprehensam demonstratio linealis. Ad Christianum IV serenissimum Daniae et septentrionis regem«. Arnhemii Geldriae 1603. 4to. — C Dibvadii in geometriam Euclidis prioribus sex Elementorum libris comprehensam demonstratio numeralis. Ad Christianum Friis cancelarium Regium«. Lugdani Batavorum 1603. 4to. — »C Dibvadii in arithmeticam rationalium Euclidis septimo, octavo et nono Elementorum libris comprehensam demonstratio. Ad Jacobum I Magnae Britanniae Franciae et Hyberniae regem«. Arnhemii Geldriae 1605. 4to. — »C Dibvadii in Arithmeticam irrationalium Euclidis decimo Elementorum libro comprehensam demonstratio linealis et numeralis. Ad Henricum Walliae Principem, Regnumque Britanniae magnae, Franciae et Hyberniae heredem«. Arnhemii Geldriae 1605. 4to.

Den første, tredie og fjerde Afhandling indeholder en latinsk Oversættelse af de 10 første Bøger, hvor særlig maa bemærkes hans korte Indledninger til hver Bog med klar Redegørelse for Bøgernes Indhold, og hvori han tillige gør opmærksom paa, hvad han finder særlig interessant at bemærke. Særlig højt skatter han anden Bog, som han finder betydeligst, idet, som han siger, hele Algebraens beundringsværdige Bygning, deri indbefattet Læren om de irrationale Størrelser, findes i den. Ved Kommentaren i den anden Afhandling angiver han ved Sætning 5, at han ikke vil gaa ind paa Anvendelsen til Ligningers Løsning, men nøjes med at henvise til Vieta's og Ludolphs Arbejder. Naar han i Kommentaren til 2den Bog allerede omtaler irrationale Størrelser, begrunder han det i en Note til Sætn. 4. Betydningen af 4de Bog ser han i den Hjælp, den yder til Udregning af trigonometriske Tabeller ved Anvendelse af de regulære Polygoner, hvortil ogsaa kommer Bestemmelsen af π, som han nærmere omtaler i Kommentaren til Sætn. 7 efter Ludolphs Fremgangsmaade. Om 5te og 6te Bog erklærer han, at de indeholder noget nyt, thi de tidligere

har behandlet selve Størrelserne, nu behandles de kun i Forhold til hinanden. Særlig opfordrer han til at lægge vel Mærke til 5te Bog, da den indeholder hele Proportionslæren, der er saa vigtig for alle beslægtede Discipliner. Han er slet ikke fornøjet med alle Euclids Navne paa de forskellige Proportioner, der opstaar ved Proportionsændringerne, og som han finder overflødige, hvori han har Ret set med Datidens Øjne, men han glemmer, at Euclid mangler Tegnsproget.

I hans Kommentar til de geometriske Bøger, der er udskilt som en særlig Afhandling, den anden, begynder han med et Par Sætninger af Betydning for Arealberegningen, som spiller en betydelig Rolle i hans Kommentar. Den første Sætning er egentlig kun en Omskrivning af Sætn. 41 (I Bog), den hedder, at et Parallelogram med samme Grundlinie som en Trekant, men med halv saa stor Højde som Trekanten, er lig denne; den anden er den heroniske Formel for Trekantens Areal med Bevis.

I Kommentaren bruger han meget hyppigt Trigonometri foruden de alt nævnte irrationale Størrelser, som forekommer deri. Dybvads Kommentar til disse Bøger er ikke beregnet for Begyndere; de, der skal læse den, maa først have læst hele Euclid og dertil Trigonometri. Dette er formodentlig ogsaa Grunden til, at denne Kommentar er udskilt som selvstændig Afhandling, medens Kommentarerne til de andre Bøger mere er vejledende Eksempler til de enkelte Sætninger, særlig Taleksempler, hvorfor hans Bemærkninger findes efter hver Sætning. Den geometriske Kommentar er nærmest at betragte som en fri Behandling af Euclid støttet paa Elementerne. Dybvad indleder sin tredie Afhandling med den Bemærkning, at Euclid, den store Geometer, ogsaa var stor som Aritmetiker, en Sandhed, der erkendes af alle.

Han opfordrer Læserne til stadig at have V Bog i Erindringen ved Læsningen af de følgende Bøger, da den anvendes hyppigt deri. Heri er ikke meget at bemærke, udover at han særlig fremhæver Sætn. 35 af 9de Bog, som giver Summationen af Kvotientrækker, men dette var allerede den Gang fuldt ud anerkendt, det omtales bl. a. ogsaa hos Resen, saa der er ingen Anledning til at dvæle længere ved VII—IX Bog. Derimod er der større Grund til nærmere at omtale hans sidste Afhandling, der indeholder X Bog med Kommentar. Han begynder med en Fortale og Indledning, hvori han giver en selvstændig Behandling af irrationale Størrelser, som er meget hensigtsmæssig, thi derved opnaar han, at han straks ved Definitionerne kan oplyse dem ved Eksempler, som nu er Læseren forstaaelige, og ligeledes ved Sætnin-

gerne kan anvende dem paa de forskellige Arter af irrationale Størrelser. Af Indledningen skal her fremhæves to Ting, nemlig hans Konstruktion af irrationale Udtryk — for at vise Euclids Berettigelse til at udtrykke dem ved Linier —, idet han benytter Konstruktioner dels af Mellemproportional dels ved Hjælp af Pythagoras Sætning. Det andet Punkt er Formlen til Ændring af dobbelt irrationale Størrelser til enkelt irrationale, som han har i Ord og oplyst ved Eksempler. Han anvender Formlen ogsaa, hvor Størrelsen ikke bliver enkelt irrational, da det mulig kan være af Betydning at faa Størrelsen delt i to.

Til den bekendte Sætning 1 af denne Bog, som danner Grundlaget for Exhaustionsbeviset hos Grækerne, gør han en Del uklare Bemærkninger om, hvorfor Euclid taler om »mere end Halvdelen« fremfor om »Halvdelen«, da Sætningen jo ogsaa gælder i dette Tilfælde, men han viser dog, at han forstaar Sætningen og dens Betydning, at der altid eksisterer et mindre Tal, naar man ikke gaar til absolut Nul, som han udsiger i følgende Ord »Ostendit itaque minimum in surdo numero non posse dari.« Kun faa andre almindelige Bemærkninger findes der, idet Resten af Kommentaren indskrænker sig til Taleksemplerne.

Muligvis har Dybvad kendt Clavius' vidtløftige Kommentar, men selv angiver han ingen Kilder, ej heller for sin Tekst til Euclid. Clavius nævner han i en af sine Tilegnelser som en af Datidens dygtigste Matematikere, men direkte benyttet hans Tekst har han ikke, da han ikke følger dennes Ordning af Sætningerne. I de nævnte Tilegnelser, som særlig indeholder Lovtaler over Matematikens Betydning, viser han et betydeligt Kendskab til Forfattere baade fra Oldtiden og fra senere Tider. Han selv nød megen Anseelse som Matematiker i Udlandet; herom vidner de forskellige Vers fra forskellige Lærde, deriblandt Ludolph, hvori han selv og hans Arbejde roses til Overmaal efter Datidens Skik. De foreliggende Afhandlinger viser ham som en Mand, der har Lyst til at tage fat paa Opgaver, der just ikke ligger lige for, idet hans Arbejde ikke som andres er direkte beregnet paa Anvendelsen her hjemme til Undervisningsbrug, hverken ved Skolerne eller ved Universitetet; det maa opfattes som et selvstændigt videnskabeligt Arbejde, der skal vise Euclids Betydning. Forfatteren fortjente en bedre Skæbne end den, han fik, men dels havde han vel arvet noget af Faderens umedgørlige Karakter, dels havde Faderens Uvenner vel overført noget af deres Had til denne paa Sønnen, som de derfor ikke ønskede til Kollega. Han døde, fængslet paa Kallundborg Slot, kvalt af Kuldamp 1622 i en Alder af c. 44 Aar.

Efter dette selvstændige Arbejde kom *Jørgen Eilersen*, der skrev sin matematiske Lærebog beregnet for Skolerne og Universitetet — den blev bl. a. benyttet paa Odense Gymnasium i ca. 50 Aar som Grundlag for Undervisningen der. Titlen er »Progymnasmatum mathematicorum Enchiridion continens: I primi elementi Euclidei apospamation, Græc et Lat. II praecepta sphærica, III . . . IV . . . V . . . . Discentium usui destinatum, a Gregorio Hilario«, Hafniae 1656, 8vo, med Undertitel »Primi Euclidei elementi apospasmation Grec et Lat Isagoges geometricae loco discentibus traditum a G Hilario«. Hafniae s. a.

Forfatteren deler Geometrien i Geometria speculativa og G. practica, den første indeholdende Teoremerne, den anden Problemerne; da han nu kun medtager den første Del, bliver Bogen ikke en fuldstændig Oversættelse af Euclids I Bog, tilmed da han ordner om paa Sætningerne. Til Definitionerne føjer han et Par vedrørende Parallelogrammer og def. 6 lib. 3. Aksiomerne og Postulaterne har han uforandret efter ældre Udgaver; han følger ogsaa trolig Inddelingen af Indholdet af I Bog i tre Dele, om Trekanter, om Paralleler og om Parallelogrammer. Han sætter først Sætningerne om Siderne (Sætn. 4, 8, 24, 25, 26) og om Vinklerne (5, 6, 13, 20) i Trekanten, dernæst i andet Kapitel Sætningerne om Paralleler (27, 30, 32, 34) og tilsidst i tredie Kapitel, hvad der angaar Parallelogrammer (35, 37, 41, 43, 47, 48).

Medens denne Forfatter tager den ene Del af Euclids Sætninger ud, tager den næste, vi træffer, den anden Del, nemlig Problemerne, som han behandler med stor Frihed i et lille Skrift, der vel ikke indeholder meget af Betydning, men dog giver den første selvstændige Samling Konstruktionsopgaver, som er bygget paa Problemerne hos Euclid ikke alene i I Bog. Det er *Georg Mohr*, hvis eneste Skrift skal omtales her. Det fører Titlen »Euclides Danicus, Bestaande udi Too Deele. Dend Første Deel: Handler udaf de Sex Første | Euclids Bøger | de derudi begreffne Maalkunstige Werckstycker. Dend anden Deel: Giffver anledning Atskillige Werckstycker at gøre | som Skæring | Røring | Deeling | Skinbar Tegnekonst oc Soole-visere. Alleniste med en Circkel (Foruden Linial at bruge) med Skærelser af Runder. Forestillet af Georg Mohr«. Amsterdam 1672. 4to.

Bogen udkom samtidig paa Hollandsk. Forfatteren anvender Konstruktionerne hos Euclid til simple Konstruktioner af Trekanter, regulære Polygoner og lignende, alt paa dansk og med alle de tekniske Ord fordanskede, f. Eks. kaldes en Cirkel en Rund, en Trekant en Trehjørne. Anden Del fortsætter med mere sammensatte Konstruktioner, ja endog Projektioner, men uden særlig Grund til videre Omtale.

Til Undervisningsbrug fremkom i det 18de Aarhundrede følgende i min ovenciterede Afhandling nærmere omtalte Euclidudgaver, nemlig:

I. F. Ramus »Elementa Geometriae sex prioribus libris Euclidis« Hafn 1737, 4to, og i udvidet Udgave »Euclidis elementa Geometriae planae libri VI comprehensa, in usum incipientium adornata« 1740, 8vo, og derpaa den første danske Oversættelse af Euclid ved *Ziegenbalg*` »Euclidis Elementa geometriae, Euclidis første Grunde til Geometrien« Kbhvn. 1744, 4to, forsynet med en Fortale af Ramus. Den indeholder foruden de første 6 Bøger tillige 11te og 12te Bog.

Endnu kan nævnes *Andreas Brunckmanns* Regnebog 1757, der mangler Titelblad, men hvortil hører en Række Tillæg med Titelblade. Det første Tillæg er »Euclidei Elementi Explication med dansk Forklaring«, og er en Art Kommentar, hvori han ved Hjælp af Figurer oplyser Definitionerne, og til enkelte af de vigtigste Sætninger giver de allernødvendigste Forklaringer; det hele gør Indtryk af at være samlet for Eksamensrepetition, men er ellers betydningsløst.

Med det næste Værk slutter paa Overgangen fra det 18de til det 19de Aarhundrede Arbejdet for Euclids Elementer til Undervisningsbrug. Det er *H. Chr. Linderups* — Overlærer ved Metropolitanskolen — danske Oversættelse af Euclid; den er beregnet paa den nye Skoleordning. Titlen er »De første sex Bøger af Euclids Elementer til Brug i de forandrede lærde Skoler oversat af Græsk ved Hans Chr. Linderup«. Kbhvn. 1805, 8vo. Af Oversætterens Forord ser man, at det ikke var Hensigten med Bogen, at den skulde bruges af Begyndere. Han meddeler nemlig, at han i de sidste Aar — den nye Ordning indførtes allerede 1797 paa Prøve i Metropolitanskolen — efter at have gennemgaaet det befalede Kursus har forklaret sine Elever i ældste Klasse flere af Euclids Bøger for at vise dem et Mønster paa en fuldkommen Lærebog; det er altsaa en helt ny Stilling, han tiltænker Euclids Elementer i Undervisningen, om jeg saa maa sige en historisk. Hvorvidt han har faaet Bogen indført i Skolerne og i hvilken Udstrækning vides ikke.

Denne nye Stilling er det, at Euclids Elementer nu indtager; af Forelæsningskatalogerne fremgaar det, at Euclid egentlig i den største Del af det 19de Aarhundrede er gleden ud af Emnerne, og først i Foraarssemestrene 1863 og 1866 kommer Forelæsninger over »Matematikens Historie i Oldtiden« af A. Steen, hvor selvfølgelig Euclid har indtaget en første Plads; men først med Professor Zeuthen aabnes en stadig Række Forelæsninger, der begynder Foraaret 1876 med »Matematikens Historie i Oldtiden« og fortsættes i Foraars- og Efteraarsse-

mestret 1882 med »Gennemgang af enkelte klassiske matematiske Værker fra Oldtiden og den nyere Tid«, hvortil ogsaa hørte nogle Bøger af Euclid. Siden, efter Indførelsen af Skoleembedseksamen, har Prof. Zeuthen fortsat med Forelæsninger og Eksaminatorier over forskellige Dele af Matematikens Historie, saaledes at der hvert andet eller tredie Aar har været saadanne Forelæsninger, saa at nu Faget, takket være Prof. Zeuthens varme Interesse derfor, maa siges at være bleven et fast Lærefag ved Universitetet.

Foruden gennem Forelæsninger virker Universitetet ogsaa gennem Prisopgaverne til Fremme af Studierne. Af de i Tidens Løb stillede Opgaver giver en Del Anledning til at vise matematisk-historiske Kundskaber, men kun en enkelt, Opgaven fra 1886/87, vedrører Studiet af Euclid, nemlig X Bog (i en algebraisk Genfremstilling af 10de Bog af Euclids Elementer at paavise de enkelte Sætningers Forbindelse og Formaal); den fremkaldte to Besvarelser, der henholdsvis belønnedes med et Accessit og med en Guldmedaille. Hovedresultaterne af den sidste Afhandling har jeg offentliggjort under Titlen »Gleichungen vierten Grades im zehnten Buch der Elemente Euclids« i Zeitschrift f. Math. u. Physik 34. Bind. 1889. Histor. Abt. 201—217 — ogsaa i Tidsskrift for Mathematik 1889.

Af den største Betydning for Studiet af Euclid er J. L. Heibergs bekendte Euclidudgave, thi denne betydelige Filolog har gennem sin Tekstrevision givet Matematikerne et sikkert Grundlag for Studierne af Euclid, hvilket ikke bør forbigaas, naar der er Tale om Studiet af Euclid i Danmark.

Det historiske Studium af Oldtidens Matematik har givet Anledning til Prof. Zeuthens klare Oversigt over Dele af Euclids Elementer (Algebra og Proportioner) i »Keglesnitslæren i Oldtiden« 1885 (ogsaa oversat paa Tysk), og den fuldstændige Gennemgang af Elementerne i »Forelæsning over Matematikens Historie« I 1893 (oversat paa tysk og paa fransk), uden at jeg her skal forsøge en Værdsættelse af disse Arbejder.

For Fuldstændigheds Skyld skal her nævnes en lille Afhandling af Prof. Zeuthen: »Die geom. Construction als »Existensbeweis« in der antiken Geometrie« 1896 i Clebsch Math. Annalen (ogsaa paa Dansk, Nyt Tidsskrift for Mat. 1898), og Universitetets Indbydelsesskrift til Kongens Fødselsdag 1896 med sammes Afhandling.: »Om den historiske Udvikling af Matematiken som eksakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede«, idet jeg forbigaar de filologiske

Arbejder af J. L. Heiberg, dels alene, dels i Forbindelse med Menge eller Besthorn.

Som Aarhundredet begyndte med en dansk Oversættelse af Euclid, slutter det, idet i 1897 udkom »Euclids Elementer I—II, oversat af Thyra Eibe, cand. mag., med en Indledning af Prof. Dr. H. G. Zeuthen« Kbhvn. 1897, 8vo, og fortsat med et nyt Hefte indeholdende III—IV i 1900. Denne Oversættelse henvender sig dels til Lærere, dels til de matematisk studerende og endelig til enhver, der har nogle matematiske Kundskaber, hvorfor de med Glæde og Udbytte kan læse Euclids Arbejde.

Som Vidnesbyrd om Interessen for det matematiske historiske Studium bør nævnes *La Cour* »Historisk Matematik« Kbhvn. 1888 og anden Udgave 1898, 8vo, der selvfølgelig ogsaa omfatter Euclid; om jeg end personlig ikke antager, at denne Undervisningsmetode giver saa gode Resultater, har denne Bog dog sin store Interesse som et selvstændigt Arbejde, bygget paa Forfatterens store Kendskab til Matematikens Udvikling gennem Tiderne.

Om en Transformation, hvorved nogle Kurver af 4^{de} Orden og Slægten 3 gaar over i sig selv.

Af **C. Crone.**

---

1. I sin Ligningers Teori har Professor Julius Petersen undersøgt Betingelsen for, at Skæringspunkterne mellem en Kurve k_4 af 4^{de} Orden og et Liniebundts Linier kan bestemmes ved Lineal og Passer. Han finder som nødvendig og tilstrækkelig Betingelse, naar k_4 er af Slægten 3, at 4 af Bundets Linier er Dobbelttangenter til k_4 og har deres Røringspunkter paa et Keglesnit. Professor Zeuthen har i en Afhandling i d. K. D. Vidensk. Selskabs Forhandlinger 1879 angivet Konstruktioner ved Lineal og Passer af Skæringspunkterne mellem en Kurve af 4^{de} Orden med 2 Dobbeltpunkter og Tangenterne til visse Kurver af 2^{den} og 3^{die} Klasse.

I Nyt Tidsskrift for Matematik, 7^{de} Aarg., har jeg behandlet den analoge Opgave for et Keglesnits Tangenter og en Kurve k_4 af vilkaarlig Slægt. Dobbeltpunkterne i en af de Involutioner paa en vilkaarlig Tangent t til c^2, hvori t's Skæringspunkter med k_4 danner to Punktpar, maa bestemmes ved en Ligning af 2^{den} Grad i x, der er rational med Hensyn til t's Parameter τ. Alle disse Involutioner paa c^2's Tangenter danner et Involutionssystem med c^2 til Grundkurve, og en Kurve af lige Orden siges at høre til dette, naar den skærer enhver Tangent t i lutter Punktpar i Involutionen. Jeg benytter nu i min ovennævnte Afhandling følgende Sætning:

Hvis nogle Kurver af samme Orden med Ligningerne $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ .... høre til et Involutionssystem, vil det samme gælde enhver Kurve med en Ligning af Formen $au + bv + cw \cdots = 0$, hvor a, b, c .... er vilkaarlige Konstanter.

Hvis nemlig paa en vilkaarlig Tangent t Involutionens Dobbeltpunkter har Abscisserne o og ∞, maa de Ligninger $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $w_1 = 0 \cdots$, der bestemmer Abscisserne til de forskellige Kurvers Skæringspunkter med t, kun indeholde x med lige Eksponenter. Det samme bliver Tilfældet med Ligningen $au_1 + bv_1 + cw_1 \cdots = 0$; dens Rødder er da parvis lige store med modsat Tegn og svarer altsaa til et Antal Punktpar i Involutionen.

Alle til et Involutionssystem hørende Kurver k_4 indgaar i saadanne lineære Samlinger, bestemte ved sammensatte Kurver, for hvilke Paavisningen af, at de hører til Involutionssystemet, ikke frembyder nogen Vanskelighed.

Jeg søger i det følgende at udstrække Undersøgelsen til Involutionssystemer, hvis Grundkurve er en unikursal Kurve af 3die Klasse med en Dobbelttangent med adskilte Røringspunkter, idet jeg dog indskrænker mig til Kurver k_4 af Slægten 3. En saadan til et Involutionssystem hørende Kurve vil gaa over i sig selv ved den Transformation, der fører et vilkaarligt Punkt i Planen over i et dermed sammenhørende, d. v. s. til samme Punktpar hørende. To Kurver, der ved denne Transformation gaar over i hinanden, vil vi kalde sammenhørende.

2. Tangenten til den Cayleyske Kurve for et System 4dobbelt rørende Keglesnit til k_4 skærer Systemets Keglesnit i et Involutionssystem, hvortil k_4 hører. Er den Cayleyske Kurve, hvis Klasse er $= 3$, unikursal, hvad den bliver, naar i det Net, hvortil Systemet hører, to Keglesnit har Dobbeltrøring, har vi altsaa et Involutionssystem af den forlangte Beskaffenhed. Opløser den Cayleyske Kurve sig i et Punkt C og et Keglesnit c^2, vil Liniebundtet gennem C være det af Jul. Petersen paapegede; dette fremkommer omvendt kun paa denne Maade, idet de 4 Dobbelttangenter i Liniebundtet danner to til samme System hørende 4dobbelt rørende Keglesnit, og dette Systems Cayleyske Kurve altsaa maa opløse sig i Liniebundtets Toppunkt og et Keglesnit c^2. k_4 svarer til sig selv i en harmonisk Kollineation med Centrum i C og C's Polar med Hensyn til Keglesnittet gennem Dobbelttangenternes Røringspunkter til Akse. c^2 tangeres af de 8 Dobbelttangenter, der danner med sig selv kollineære Liniepar i Systemet. Systemets Keglesnit bestemmer paa c^2's Tangenter et Involutionssystem, hvortil k_4 hører.

Vi vil nu først fremdrage nogle Egenskaber ved de Involutionssystemer, som Undersøgelsen omfatter, altsaa saadanne, hvortil der

hører Kurver af 4[de] Orden og Slægten 3, idet vi lader Grundkurven c^p's Klasse p være vilkaarlig.

3. En vilkaarlig Tangent t til c^p fremstilles i retvinklede Koordinater ved en Ligning, hvis Koefficienter er hele rationale Polynomier af Graden p i en variabel Parameter τ; ved Elimination af y mellem t's og k_4's Ligninger faas en Ligning $F = 0$ af Graderne 4 i x og $4p$ i τ. Den nødvendige og tilstrækkelige Betingelse for, at $F = 0$ skal kunne løses med Hensyn til x ved Kvadratrod, er, at den kubiske Resolvent

$$m^3 - \frac{i}{2} m - \frac{j}{3} = 0,$$

hvor i og j er F's Invarianter af henholdsvis 2[den] og 3[die] Grad i F's Koefficienter, har en med Hensyn til τ rational Rod m_1. Da i og j er hele rationale Funktioner af τ, maa m_1 være hel og af Graden $4p$ i τ. Har en af de med y-Aksen parallele Tangenter til c^p Ligningen $x = 0$ og svarer til $\tau = 0$, kan t's Ligning skrives $y = \frac{ax + b\tau}{c\tau}$, hvor a, b og c er hele med Hensyn til τ; alle Leddene i F bliver da mindst af Graden 4 med Hensyn til τ og x. Da er i, j og Hesse's Kovariant H delelig med henholdsvis τ^4, τ^6 og τ^2, altsaa med R^4, R^6 og R^2, hvis R betegner Koefficienten til y i t's Ligning. m_1 maa da være delelig med R^2.

Man har nu Identiteten

$$H + m_1 F \equiv R^2 \alpha \cdot \varphi^2,$$

hvor α er hel rational og af den lige Grad f i τ, φ hel rational i τ og x. Rødderne i den i x kvadratiske Ligning $\varphi = 0$ er Abscisser til Dobbeltpunkterne i en af de 3 Involutioner paa t, der bestemmes af t's Skæringspunkter med k_4 parrede sammen til to Punktpar. $\varphi = 0$ bestemmer Involutionssystemet paa c^p's Tangenter. Efter Bortdivision af R^2 kan Identiteten skrives:

$$H_1 + m'_1 \cdot F \equiv \alpha \cdot \varphi^2.$$

Venstre Side er af Graden $6p$ i τ, φ følgelig af Graden $3p - \frac{f}{2}$.

En Tangent t_1 med Paramter τ_1 kan have en speciel Involution, d. v. s. en Involution med Dobbeltpunkterne sammenfaldende i et Fundamentalpunkt G. Ethvert Punktpar i denne Involution har sit ene Punkt liggende i G. Enhver til Involutionssystemet hørende Kurve af Ordenen $2n$ maa have n Skæringspunkter med t_1 faldende

i G. Af t_1's Skæringspunkter med k_4 falder altsaa to til forskellige Punktpar hørende sammen i G, der maa være et Røringspunkt mellem c^p og k_4 eller et Dobbeltpunkt paa k_4. Er nemlig t's to andre Skæringspunkter med k_4 adskilte, kan Abscisserne til de Punkter, hvori de falder ved Overgang til en nærliggende Tangent, udvikles i Række efter Potenser af $\tau - \tau_1$ med hele positive Eksponenter; det samme maa da gælde Abscisserne til de i G faldende Skæringspunkter, der jo ligger harmonisk til de andre med Hensyn til de ved $\varphi = 0$ bestemte Punkter. At det samme er Tilfældet, naar de to andre Skæringspunkter falder sammen, overbeviser man sig let om. Af φ's Diskriminant kan R^2 bortdivideres, og den er derefter af Graden $4p - f$; kaldes Antallet af Fundamentalpunkter a, har man altsaa:

(1) $$a + f = 4p.$$

4. Er en Tangent t svarende til $\tau = \tau_1$ en Del af k_4, vil $\tau - \tau_1$ være Faktor i alle F's Koefficienter og altsaa være to Gange Faktor i α. En anden Værdi for τ, som gør α til 0, maa svare til en Tangent t_1, paa hvilken de to Punktpar i Involutionen, der dannes af Skæringspunkter med k_4, falder sammen i et Punktpar LM. Idet L og M tænkes adskilte, maa Dobbeltpunkterne i Involutionen paa t_1 være forskellige fra dem, idet t_1's Involution ikke er speciel. Svarer t_1 til $\tau = 0$, og skærer en nærliggende Tangent k_4 i L_1L_2, som falder i L, og M_1M_2, som falder i M, naar τ bliver 0, maa Liniestykkerne L_1L_2 og M_1M_2 være af samme, r^{te}, Orden i Sammenligning med τ. Er t_1's Røringspunkt R med c^p forskelligt fra L og M, har de to Grene af k_4 gennem L — og ligesaa de to Grene gennem M — Røring af $r - 1^{te}$ Orden; falder R i L, faar de to Grene gennem L Røring af Ordenen $\frac{r}{2} - 1$. Er i sidste Tilfælde $r = 1$, er L et almindeligt Røringspunkt mellem k_4 og c^p. Vælges paa t_1 det Punktpar, der deler baade L_1L_2 og M_1M_2 harmonisk, til Grundpunkter $u = 0$, $v = 0$ i et Koordinatsystem, vil Punkterne L_1, L_2, M_1, M_2 fremstilles ved en Ligning $a \cdot u^4 + 6cu^2v^2 + ev^4 = 0$; da u-Koordinaterne til L_1 og L_2 og v-Koordinaterne til M_1 og M_2 er af samme Orden som henholdsvis L_1L_2 og M_1M_2, altsaa af r^{te} Orden, bliver a og e af Ordenen $2r$. Identiteten i 3 antager her Formen:

$$acu^4 + (ae - 3c^2)\,u^2v^2 + cev^4 - \frac{-c \pm \sqrt{ae}}{2} \cdot (au^4 + 6cu^2v^2 + cv^4)$$
$$\equiv \tfrac{1}{2} \cdot (3c \mp \sqrt{ae})\,(\sqrt{a} \cdot u^2 \mp \sqrt{e}\,v^2)^2,$$

hvor højre Side er af Ordenen $2r$ med Hensyn til τ.*) Idet vi kun faar Brug for de Tilfælde, hvor t_1 gaar gennem Dobbeltpunkter eller Selvberøringspunkter paa k_4 eller rører k_4, bliver der følgende mulige Stillinger af t_1: t_1 gaar gennem to Selvberøringspunkter paa k_4 eller gennem et Selvberøringspunkt og et Dobbeltpunkt, i hvilket sidste den rører c^p; t_1 gaar gennem to Dobbeltpunkter paa k_4 eller den gaar gennem et Dobbeltpunkt og rører k_4 i et Røringspunkt med c^p; t_1 er Dobbelttangent til k_4. τ's til t_1 svarende Værdi er i de to første Tilfælde 4 Gange, i de to næste 2 Gange, i sidste Tilfælde 1 Gang Rod i $\alpha = 0$. Man kan naturligvis i Stedet for to Grene af k_4 gennem L og to gennem M sætte to forskellige Kurver gennem L og de dermed sammenhørende gennem M.

5. Paa c^p's Dobbelttangent d vil der være to Involutioner svarende til hver sin af de i d faldende Tangenter. Med Hensyn til disse Involutioner er der tre Muligheder: 1°. de kan falde sammen; 2°. de kan danne Kvadrupler, d. v. s. hører et vilkaarligt Punkt A i den ene Involution sammen med B, i den anden med C, og er BD Punktpar i den sidste Involution, er altid CD Punktpar i den første; alle Punktpar som AD og BC danner en Involution, hvis Dobbeltpunkter er det for de to første Involutioner fælles Punktpar. Disse Kvadrupler kan være Skæringspunkterne mellem d og en lineær Samling til Involutionssystemet hørende Kurver k_4. 3°. Intet af de nævnte Tilfælde indtræder; de to Involutioner har et fælles Punktpar, hvori enhver til Involutionssystemet hørende Kurve k_4 af Slægten 3 maa røre d.

Koordinaterne til en Tangent t's Røringspunkt M med c^p vil være udtrykte ved Brøker, hvis Tæller og Nævner er rationale hele Polynomier af Graden $2p - 2$ i τ. Koordinaterne til det med M sammenhørende Punkt, altsaa det, der med M deler Punktparret bestemt ved $\varphi = 0$ harmonisk, bliver Brøker, hvis Tæller og Nævner er af Graden $5p - \frac{f}{2} - 2$; de kan imidlertid forkortes med R og med de a lineære Faktorer $\tau - \tau_1$, hvor τ_1 svarer til et Fundamentalpunkt, hvorved Tællers og Nævners Grad bliver $4p - a - \frac{f}{2} - 2 = \frac{f}{2} - 2$; dette bliver ogsaa Ordenen af det geometriske Sted for de Punkter, der i Involutionssystemet hører sammen med Tangenterne t's Røringspunkter. Er $f = 4$, ligger det med M sammenhørende Punkt fast; Linierne t

*) Smlgn. Salmons: Modern higher Algebra, 1876, p. 191.

danner et Bundt, og Involutionen paa hver af dem har et Dobbeltpunkt i Bundtets Toppunkt. Dette maa altid gælde for $p = 1$, da saa f if. (1) ikke kan være > 4. Bortset fra dette Tilfælde maa f være > 4; a kan for $p = 3$ have Værdierne 0, 2, 4, 6.

6. Af særlig Vigtighed for det følgende er Undersøgelsen af, hvorvidt der til et Involutionssystem hører et Keglesnit. Til Bestemmelse af Keglesnittet χ_2's Skæringspunkter med en vilkaarlig Tangent t faas en Ligning $A_1x^2 + B_1x + C_1 = 0$, hvor A_1, B_1, C_1 er af Graden $2p$ i τ. Er $\varphi \equiv Ax^2 + Bx + C$, vil Skæringspunkterne danne et Punktpar i Involutionen, saafremt:

(2) $$2 \cdot (A_1C + AC_1) - BB_1 = 0;$$

denne Ligning er lineær i Keglesnittets Lignings Koefficienter. Antages som før Y-Aksen at være en Tangent t svarende til $\tau = 0$, vil B og B_1 være delelige med τ, C og C_1 med τ^2, hvoraf indses, at R^2 kan bortdivideres af (2), der derefter er af Graden $3p - \frac{f}{2}$. Hvis man altsaa kan faa χ_2 til at indeholde $3p - \frac{f}{2} + 1$ Punktpar i Involutionssystemet, hvorved det at gaa gennem et Fundamentalpunkt tæller for at indeholde et Punktpar, vil (2) være identisk i τ og χ_2 høre til Involutionssystemet.

Er $p = 1$, danner Linierne t et Liniebundt, hvortil der hører 4 Dobbelttangenter til k_4, hvis Røringspunkter danner Punktpar i Involutionssystemet. Her vil alle Keglesnit gennem Røringspunkterne paa 2 af disse Dobbelttangenter høre til Involutionssystemet. Et af disse Keglesnit gaar gennem Røringspunkterne paa endnu en af de fire Dobbelttangenter og maa da indeholde en fjerde Dobbelttangents Røringspunkter; disse maa danne et Punktpar, saa at Dobbelttangenten hører til Liniebundtet. Det eneste Tilfælde, hvor $p = 1$, er da det af Jul. Petersen angivne.

Er der 3 til Involutionssystemet hørende Keglesnit, som ikke hører til samme Bundt, maa det ved disse Keglesnit bestemte Net ogsaa høre til Involutionssystemet. Et vilkaarligt Punkt A har for $p = 3$ tre forskellige tilsvarende Punkter BCD; $ABCD$ er Basispunkter for et Bundt i Nettet og danner 6 Punktpar i Involutionssystemet. For $p = 2$ maa et vilkaarligt Punkt A, dets to sammenhørende B og C og endnu et Punkt D være Basispunkter for et Bundt. Enten er da AB, BC, CD, DA Punktpar, eller AB, BC, CA maa være det;

det sidste Tilfælde lades imidlertid ude af Betragtning, da paa hver af de to Tangenter til c^2 fra D Involutionens Dobbeltpunkter falder sammen i D, der følgelig bliver Dobbeltpunkt paa enhver til Involutionssystemet hørende Kurve. Vælges A paa k_4, maa B, C og D ogsaa ligge paa k_4, og ethvert Keglesnit gennem A, B, C og D maa skære k_4 i endnu 4 Basispunkter for et Bundt i Nettet; et Keglesnit i Bundtet rører k_4 i A, B, C og D. Da Nettet altsaa indeholder et System firdobbelt rørende Keglesnit til k_4, maa Involutionssystemets Grundkurve være Systemets Cayleyske Kurve, og vi har de i 2 omtalte Tilfælde.

Disse udtømmer fuldstændigt Involutionssystemerne $p = 3$, $a = 0$, $f = 12$ og $p = 2$, $a = 0$, $f = 8$. Ved det første af disse danner de $f = 12$ Dobbelttangenter til k_4 66 firdobbelt rørende Keglesnit, af hvilke nødvendigt to, lm og np, maa høre til det samme af de 63 Systemer af saadanne Keglesnit. Keglesnittet u gennem Røringspunkterne paa lm og np hører til Involutionssystemet, da

$3p - \frac{f}{2} = 3$; idet $k_4 \equiv u^2 - lmnp$, maa enhver Tangent t skære $lmnp$

i to Punktpar, saa at f. Eks. lm og np er to til Involutionssystemet hørende Keglesnit. Nettet bestemt ved lm, np og u hører da ogsaa til Involutionssystemet. For $p = 2$, $a = 0$, $f = 8$ er der altid et Net til Involutionssystemet hørende Keglesnit.

Hører der til Involutionssystemet et Bundt Keglesnit (χ_2), men ikke et Net, kan man lægge et Keglesnit χ_2 i Bundtet gennem Røringspunkterne for en af de f Dobbelttangenter. Da vil det til Involutionssystemet hørende Kurvebundt $k_4 + \lambda \cdot \chi_2^2 = 0$, hvor λ er en Parameter, indeholde en Kurve sammensat af Dobbelttangenten og en Kurve af tredie Orden.

7. I Tilfældene, hvor $a \geq 2$, behøver man kun at betragte saadanne Involutionssystemer, der er bestemte ved en Kurve sammensat af en ret Linie og en Kurve af 3$^{\text{die}}$ Orden eller af to sammenhørende Keglesnit. Andre sammensatte Kurver maa nemlig bestaa af to til Involutionssystemet hørende Keglesnit, og en alene ved saadanne Kurver bestemt lineær Samling vilde have Dobbeltpunkter i Fundamentalpunkterne. Til de nævnte Involutionssystemer hører ogsaa de, der bestemmes ved et Liniepar og et dermed sammenhørende Keglesnit; er Involutionssystemet bestemt ved fire adskilte rette Linier, danner disse to til Systemet hørende Keglesnit, og der er et Bundt saadanne Keglesnit.

8. For at finde en til et Involutionssystem hørende sammensat Kurve, der indeholder en ret Linie l, vil vi bestemme det geometriske Sted k for de med l's Punkter sammenhørende. Et Punkt paa l har sine Koordinater udtrykte som Forhold mellem Polynomier af p^{ende} Grad i Parameteren τ til en gennem Punktet gaaende Tangent t; for det paa Tangenten sammenhørende Punkts Koordinater ξ, η faar man som i 6 efter Forkortning med R: $\xi = \frac{T}{N}$, $\eta = \frac{T_1}{N}$, hvor T, T_1 og N er Polynomier af Graden $3p - \frac{f}{2}$ i τ. Har l Røring med c^p, vil de til Røringspunkternes Parametre svarende lineære Faktorer kunne bortforkortes af Udtrykkene for ξ og η. Gaar l gennem et Fundamentalpunkt, kan ligeledes den til dettes Parameter svarende lineære Faktor bortforkortes.*)

Hvis paa n af de fra et vilkaarligt Punkt P af k udgaaende Tangenter t det med P sammenhørende Punkt ligger paa l, er k en Kurve talt n-dobbelt; paa anden Maade kan k ikke opløse sig. Er $n = 1$, maa den Ligning, som man faar ved i Ligningen for t at indsætte Udtrykkene for ξ og η med θ sat i Stedet for τ, dele sig i to, den ene af første Grad baade i τ og θ, den anden af Graden $p - 1$ i τ og $3p - \frac{f}{2} - s - 1$ i θ, hvor s er Antallet af Berøringer mellem l og c^p. Et Værdipar for τ og θ, der tilfredsstiller begge de to Relationer, vil almindelig svare til et Røringspunkt mellem c^p og k, hvori paa den fælles Tangent to til forskellige Punktpar hørende Punkter falder sammen; af saadanne Røringspunkter er der $4p - \frac{f}{2} - s - 2$.

Skal k være en usammensat Kurve k_3 af 3[die] Orden, maa man for $p = 3$ have $9 - \frac{f}{2} - s = 3$, altsaa $\frac{f}{2} + s = 6$, eller $9 - \frac{f}{2} - s = 6$, $n = 2$, altsaa $\frac{f}{2} + s = 3$. I sidste Tilfælde udgaar fra et vilkaarligt Punkt P paa k_3 to Tangenter, paa hvilke det med P sammenhørende Punkt ligger paa l, medens hver Tangents to andre Skæringspunkter

*) At denne sidste Mulighed ikke tages i Betragtning i det følgende, ligger i, at jeg mener at have et Bevis for, at alle de her omhandlede til Involutionssystemer, hvor $p = 3$, hørende Kurvebundter (k_4) indeholder Kurver bestaaende af to til Involutionssystemet hørende Keglesnit. Beviset har ikke saa overskuelig en Form, at jeg kan ønske at fremsætte det her. Hvis et Kurvebundt foruden saadanne to Keglesnit indeholder en Kurve kl, hvor l — og følgelig ogsaa k — gaar gennem et Fundamentalpunkt, faar alle dets Kurver Dobbeltpunkt i dette Fundamentalpunkt.

med k_3 er sammenhørende Punkter. Der maa da mellem Parametrene τ for en af Tangenterne og θ for P bestaa en Relation af 2den Grad i τ og 1ste Grad i θ. De to Tangenter gennem P danner da Par i en Involution mellem c^3's Tangenter, men saa skulde det geometriske Sted for P være et Keglesnit. Vi har da kun at beskæftige os med Tilfældet $\frac{f}{2} + s = 6$. k_3 er unikursal og rører c^3 i 4 Punkter, mellem hvilke Fundamentalpunkterne befinder sig; da s højst er 2, er $f \geqq 8$, $a \leqq 4$. De til Involutionssystemet hørende Kurver k_4, som lk_3 ligger i Bundt med, røres af k_3 i 6 Punkter, der ligger paa Keglesnit med Røringspunkterne for en Dobbelttangent (l).*)

Fra et vilkaarligt Punkt P paa k_3 udgaar en Tangent, paa hvilken P er sammenhørende med Skæringspunktet med l, medens P's to andre sammenhørende Punkter ligger paa k_3. Lader man til et vilkaarligt Punktpar paa k_3 med Parametrene $\theta_1 \theta_2$ svare Punkter med Koordinaterne $x = \theta_1 + \theta_2$, $y = \theta_1 \theta_2$ i et vilkaarligt retvinklet Koordinatsystem, vil Samlingen af til Involutionssystemet hørende Punktpar paa k_3 svare til et Keglesnit; til to Punktpar paa k_3 med et Punkt fælles vil svare to Punkter, hvis Forbindelseslinie tangerer Keglesnittet med Ligningen $x^2 = 4y$. Eksisterer der en i k_3 indskreven r-Kant, i hvilken 2 paa hinanden følgende Vinkelspidser altid er Punktpar i Involutionssystemet, svarer til den en Polygon omskreven om det sidste Keglesnit og indskreven i det første. I Følge Poncelets Sætning vil der da være uendelig mange i k_3 indskrevne r-Kanter af den nævnte Beskaffenhed, og man kan tage ethvert Punkt paa k_3 til Vinkelspids i en saadan r-Kant.

Skal til et Involutionssystem, hvor $p = 3$, høre en Kurve sammensat af et Keglesnit k_2 og to rette Linier l og m, der rører c^3 henholdsvis s og s_1 Gange, saaledes at et vilkaarligt Punkt paa k_2 har et af sine sammenhørende Punkter paa l og to paa m, maa man have $9 - \frac{f}{2} - s = 2$ og $9 - \frac{f}{2} - s_1 = 4$, altsaa $s = s_1 + 2$. Da s højest kan være 2, er $s = 2$, $s_1 = 0$ og $f = 10$, $a = 2$.

9. Skal en til et Involutionssystem, hvor $p = 3$, hørende Kurve bestaa af to sammenhørende Keglesnit k_2 og k'_2, maa Udtrykkene for Abscisserne til en Tangent t's Skæringspunkter med k_2 og med k'_2 under Kvadratrodstegnet indeholde følgende Faktorer: R^2, Kvadraterne

*) Smlgn. Clebsch: Vorlesungen über Geometrie, 1876, p. 852.

paa nogle i τ lineære Faktorer, der svarer til Røringspunkterne mellem c_3 og Keglesnittene (Fundamentalpunkterne), endelig nogle Faktorer af første Grad i τ, der, da Abscisserne til et Skæringspunkt mellem t og k_2 og det sammenhørende Skæringspunkt mellem t og k'_2 har Dobbeltforholdet -1 med Rødderne i $\varphi = 0$, maa være de samme i begge Kvadratrødder; de svarer til Fællestangenter til k_2, k'_2 og c^3. Der falder følgelig lige mange Fundamentalpunkter paa de to Keglesnit, og enhver Fællestangent til c^3 og det ene Keglesnit rører ogsaa det andet. Da det samlede Antal af disse Fællestangenter og Fundamentalpunkter er 6, maa der, da $a + f = 12$, være Fælleskorder for k_2 og k'_2, som tangerer c^3, og som tilsammen tæller for 6 Rødder i $\alpha = 0$.

Vi antager foreløbig, at k_2 og k'_2 har fire adskilte Skæringspunkter $ABCD$, og at c^p's Dobbelttangent d ikke gaar gennem to af disse Punkter. Der er da tre Forbindelseslinier mellem Skæringspunkterne, der rører c^3, og der maa i den fuldstændige Firkant $ABCD$ altid være et Par modstaaende Sider, af hvilke den ene rører c^3, den anden ikke; lad AB røre og CD ikke røre. Der er et System Σ firdobbelt rørende Keglesnit til $k_2 k'_2$, der indeholder to Keglesnit, hvert sammensat af to Fællestangenter til k_2 og k'_2, og to til Dobbeltlinierne AB^2 og CD^2 reducerede Keglesnit med Toppunkter i A og B, henh. C og D. Σ kan fremstilles ved en Ligning af Formen:

$$\lambda^2 \cdot AB^2 + 2\lambda \cdot u + CD^2 = 0,$$

hvor u er et Keglesnit gennem A, B, C og D og λ en Parameter. Der er to egentlige Keglesnit i Σ, der rører en vilkaarlig Tangent t til c^3; er det ene v, kan Ligningen for $k_2 k'_2$ skrives $v \cdot AB^2 = w^2$, hvor w er et Keglesnit. Indsættes i denne Ligning y taget af Ligningen for t, bliver begge Siderne Kvadrater paa anden Grads Polynomier i x, og man ser, at t's Røringspunkt R med v og Skæringspunkt L med AB danner Punktpar i en af de Involutioner, hvori t's Skæringspunkter med $k_2 k'_2$ danner to Punktpar. Det kan ikke være den, hvori t's Skæringspunkter med samme Keglesnit er et Punktpar, da i den L hører sammen med t's Skæringspunkt med CD; vi kan altsaa antage, at det er den til Involutionssystemet hørende. Koordinaterne til R kan da udtrykkes rationalt ved t's Parameter τ; de to i τ rationale Ligninger af anden Grad i λ, der udtrykker, at et Keglesnit i Σ gaar gennem R, og at det rører t, har almindelig 1 Rod fælles. Den sidste af Ligningerne maa da opløse sig i to, der er af første Grad i λ; de Værdier for τ, der tilfredsstiller dem, svarer til de

Tangenter, hvis Røringspunkter med det til λ svarende Keglesnit er sammenhørende med Skæringspunkterne med AB, henh. CD. Ved at lade λ svare til CD^2, ser man, at den første Relation er af anden Grad i τ, idet paa to af Tangenterne fra C og D til c^3 de med disse Punkter sammenhørende falder i AB, medens paa de andre fire C og D er Dobbeltpunkter i Involutionerne.

De to Fællestangenter til c^3 og et Keglesnit i Σ, hvis Røringspunkter med Keglesnittet er sammenhørende med Skæringspunkterne med AB, danner altsaa en Involution mellem c^3's Tangenter; deres Skæringspunkt P beskriver et tredobbelt rørende Keglesnit til c^3 eller en Tangent til c^3 og danner derpaa en med Rækken af Keglesnit i Σ projektiv Punktrække. Ved Korrespondanceprincippet indses, at Indhyllingskurven for Tangenterne til Keglesnittene i Σ fra homografisk tilsvarende Punkter paa et Keglesnit eller en ret Linie er af 6^te^, henhv. 4^de^ Klasse; skal den egentlige Indhyllingskurve være c^3, maa der udsondre sig tre, henhv. et Punkt, som maa være Toppunkter for Dobbeltlinierne AB^2 og CD^2 eller Dobbeltpunkter for Liniepar sammensatte af to Fællestangenter til k_2 og k'_2, idet det tilsvarende Punkt P falder i disse Punkter.

10. Rører AB, AC og AD c^3, falder de til AB^2 og CD^2 svarende Punkter P i B og A; da AB er Tangent til c^3, danner Tangentparrene fra dens Punkter den Involution, hvortil Tangenterne fra A til CD^2 og fra B til AB^2 hører, og AB er følgelig geometrisk Sted for P. Dette Tilfælde forekommer kun, naar enten ingen Fællestangenter til k_2 og k'_2 rører c^3, eller en Fællestangent falder i d.

Er AB, BC og CA Tangenter til c^3, svarer C til CD^2, medens Skæringspunktet mellem de fra AB, BC, CA forskellige Tangenter fra A og B til c^3 svarer til AB^2. Her kan P's geometriske Sted være et Keglesnit gennem C og Dobbeltpunkterne paa de til Σ hørende Liniepar. Er P's geometriske Sted en ret Linie, altsaa den fra CA og CB forskellige Tangent gennem C, gaar de tre fra AB, BC, CA forskellige Tangenter fra A, B og C gennem samme Punkt. Da maa c^3's Røringspunkter E, F, G med BC, CA, AB være disse Liniers Røringspunkter med et Keglesnit, og Linierne AE, BF, CG gaar gennem samme Punkt. Betragtes en Tangent til c^3 nærved AB, maa det Punktpar paa denne, der ligger harmonisk til dens Skæringspunkter med k_2, med k'_2 og med Linieparret AB, CD, høre til Tangentens Involution; falder Tangenten i AB, ligger Punktparret harmonisk til AB og til G og Skæringspunktet G_1 med CD. Er der et til Involutionssysteme

hørende Keglesnit, der ikke gaar gennem A, B eller C, vil tre vilkaarligt valgte Punktpar i AB's, BC's og CA's Involutioner altid ligge paa samme Keglesnit. Dette kan imidlertid ikke gælde for Punktparret, der ligger harmonisk til AB og GG_1, og de analoge Punktpar, der ligger harmonisk til BC, EE_1 og til CA, FF_1. Med Hensyn til et Keglesnit gennem disse Punktpar vilde nemlig CG være Polar for G_1, AE for E_1, BF for F_1, men CG, AE, BF løber gennem samme Punkt, medens $G_1 E_1 F_1$ ikke kan ligge i samme rette Linie, da AE_1, BF_1, CG_1 alle løber gennem D. Naar AB, BC, CA rører c^3, og P's geometriske Sted er en ret Linie, er der altsaa intet til Involutionssystemet hørende Keglesnit, som ikke gaar gennem A, B og C.

Rører AB, AC og BD c^3, svarer CD^2 til Skæringspunktet N mellem AC og BD. Kun de to Liniepars Dobbeltpunkter kan udsondre sig, og et af dem maa gøre det. P's geometriske Sted bliver en ret Linie l gennem dette Dobbeltpunkt og N, altsaa en harmonisk Kollineationsakse for k_2 og k'_2, c^3 og hele Involutionssystemet med Kollineationscentrum i Skæringspunktet mellem AB og CD. Til l's Skæringspunkt med AB svarer det fra AB^2 forskellige Keglesnit i Σ, der rører AB i nævnte Skæringspunkt. Dette Tilfælde kan kun indtræde, naar to og kun to Fællestangenter til k_2 og k'_2 rører c^3.

11. Har k_2 og k'_2 simpel Røring i et Punkt E, og deres Fællestangent i Punktet rører c^3, ses det uden Vanskelighed, at Involutionen paa denne Tangent har sine Dobbeltpunkter sammenfaldende i E, der altsaa maa være et Fundamentalpunkt. Et Bundt til Involutionssystemet hørende Kurver k_4 bestemt ved $k_2 k'_2$ og to til Involutionssystemet hørende Keglesnit indeholder da kun Kurver med Dobbeltpunkt i E. I nærværende Undersøgelse vil altsaa gælde følgende: k_2 og k'_2 kan ikke have Dobbeltrøring, thi deres Tangenter i Røringspunkterne maa ikke røre c^3, medens Røringspunkternes Forbindelseslinie, eftersom den er almindelig Tangent eller Dobbelttangent til c^3, svarer til 4 eller 8 Rødder i $\alpha = 0$. Rører k_2 og k'_2 hinanden i C og skærer hinanden i A og B, er der kun den Mulighed, at AB svarer til to Rødder i α og CA til fire, idet CA rører c^3 i A; i det ved AB^2 og Tangenten i C talt dobbelt bestemte System Σ vil hvert Keglesnit paa to Fællestangenter med c^3 have Røringspunkterne sammenhørende med Skæringspunkterne med AB, og P's geometriske Sted bliver AB. Dette Tilfælde kan kun indtræde, naar af k_2 og k'_2's Fællestangenter (med fra C forskellige Røringspunkter) enten ingen rører c^3 eller en falder i d.

Er AB Dobbelttangenten d med Røringspunkterne R_1 og R_2, og betegner S Skæringspunktet mellem AB og CD, maa til den ene Involution paa d høre AB og det Punktpar, der ligger harmonisk til AB og R_1S, til den anden AB og det Punktpar, der ligger harmonisk til AB og R_2S. Dette indses som i 10 ved Betragtning af en Tangent nær ved AB. Hvis R_1 og R_2 er forskellige, kan de to Involutioner paa d ikke falde sammen, og AB er deres eneste fælles Punktpar. Alle til Involutionssystemet hørende Keglesnit gaar da gennem A og B, og alle Kurver i et Bundt bestemt ved to saadanne Keglesnit og $k_2 k'_2$ faar Dobbeltpunkter i disse Punkter.

12. Vi gaar nu over til Undersøgelsen af Involutionssystemerne svarende til de forskellige mulige Værdier for a og f, idet det (8) forudsættes, at ethvert til et Involutionssystem hørende Bundt Kurver k_4 indeholder en Kurve sammensat af til Involutionssystemet hørende Keglesnit. Tillige gaas der ud fra, at Fundamentalpunkterne er adskilte, og at intet af dem falder i en Spids paa c^3 eller i et af c^3's Røringspunkter med sin Dobbelttangent.

Med Hensyn til det ovenfor undersøgte Involutionssystem, hvor $a = 0$, $f = 12$, skal kun bemærkes, at de med en vilkaarlig ret Linie l's Punkter sammenhørende til geometrisk Sted har en Kurve k_3 af 3die Orden. Et Punkt A paa l og de sammenhørende Punkter B, C, D paa k_3 er Basispunkter for et Bundt i det til Involutionssystemet hørende Keglesnitsnet; et vilkaarligt Keglesnit w i Bundtet skærer lk_3 yderligere i Basispunkterne $A_1B_1C_1D_1$ for et andet lignende Bundt. Der er to Keglesnit u og v, der rører lk_3 i henholdsvis $ABCD$ og $A_1B_1C_1D_1$. lk_3 er Kurve i Bundtet $uv + \lambda w^2$ og hører følgelig til Involutionssystemet; der er uendelig mange i k_3 indskrevne Trekanter som BCD og $B_1C_1D_1$, i hvilke hver Sides Endepunkter danner et Punktpar.

13. Hører der til et Involutionssystem, hvor $a = 2$, $f = 10$, en Kurve sammensat af en ret Linie og en unikursal Kurve k_3 af 3die Orden, maa den rette Linie, da $3p - \frac{f}{2} - s$ skal være $= 3$, være en almindelig Tangent t til c^3. Hvert Punkt paa t har to sammenhørende Punkter paa k_3; disse Punktpar danner en Involution paa k_3 og svarer homografisk til t's Punkter. Da Indhyllingskurven for Forbindelseslinierne mellem et Punkt paa t og et sammenhørende Punkt paa k_3 almindelig er af 5te Klasse, maa i to af t's Skæringspunkter med k_3, S_1 og S_2, et Punkt paa t falde sammen med et Punkt i det tilsvarende Punkt-

par paa k_3; hvert af Punkterne S_1 og S_2 er altsaa Dobbeltpunkt i Involutionen paa en der igennem gaaende Tangent til c^3. k_3 rører c^3 i fire Punkter, af hvilke to er Fundamentalpunkter. Tangenterne i de to andre maa gaa gennem Skæringspunkter mellem t og k_3, for at deres Involutioner ikke skal blive specielle. Paa to af Tangenterne til c^3 fra k_3's Dobbeltpunkt D, maa et af k_3's i D faldende Punkter høre sammen med Skæringspunktet med t; disse Tangenter maa da ogsaa gaa gennem Skæringspunkter mellem t og k_3. Paa den tredie Tangent gennem D har Involutionen et Dobbeltpunkt i D. Vælger man en Involution af Punktpar paa en unikursal Kurve k_3 af 3$^{\text{die}}$ Orden og en med Rækken af Punktpar projektivisk Punktrække paa en ret Linie l, saaledes at de ovenfor angivne Betingelser er opfyldte, hvad kan gøres paa flere Maader, faar man et Involutionssystem, hvor $a = 2$; til dette hører if. 6 et Keglesnit χ_2 og alle Kurverne i Bundtet $lk_3 + \lambda\chi^2$.

Vi gaar her kun nærmere ind paa et af de mulige Tilfælde, nemlig det, hvor to af Tangenterne i Røringspunkterne mellem c^3 og k_3 gaar gennem samme Skæringspunkt S mellem t og k_3, medens to af Tangenterne til c^3 fra D gaar gennem hver sit af de to andre Skæringspunkter S_1 og S_2 mellem t og k_3. S_1 og S_2 danner et Punktpar paa t. Betegnes de to i D faldende Punkter af k_3 ved D_1 og D_2, vil $S_1D_1D_2S_2$ være en i k_3 indskreven Firkant, hvori hver Sides Endepunkter danner et Punktpar i Involutionssystemet. Der er følgelig uendelig mange saadanne Firkanter; et Keglesnit gennem Vinkelspidserne i en af dem og et af Fundamentalpunkterne G og H hører til Involutionssystemet, og der maa være et Bundt saadanne Keglesnit med to Basispunkter i G og H. De modstaaende Vinkelspidser i Firkanten danner Punktpar i den nylig omtalte Involution paa k_3, og Keglesnittets Skæringspunkter med t er deres tilsvarende Punkter i Punktrækken paa t. Lægges et Keglesnit χ_2 i Bundtet gennem Røringspunkterne mellem en vilkaarlig til Involutionssystemet hørende Kurve k_4 og en af dens f Dobbelttangenter, vil Bundtet $k_4 + \lambda\chi_2^2$ indeholde en Kurve sammensat af Dobbelttangenten og en Kurve af 3$^{\text{die}}$ Orden; enhver Tangent t er Del af en saadan til Involutionssystemet hørende Kurve. Falder t i d, bestaar Kurven af 3$^{\text{die}}$ Orden af d og et Keglesnit k_2. En vilkaarlig Tangents Skæringspunkter med k_2 kan ikke være sammenhørende, da et af dem maa høre sammen med Skæringspunktet med d; de maa da falde sammen, og k_2 bliver Linien gennem G og H talt dobbelt. Ethvert af denne Linies Punkter har to af sine sammenhørende Punkter paa d, og Linien maa altsaa være Tangent til c^3, saa at G og H

bliver sammenhørende Punkter. Involutionerne paa d danner Kvadrupler, og i deres fælles Punktpar falder de to andre Basispunkter for Keglesnitsbundtet; disse Punkters sammenhørende Punkter udenfor d maa falde i G og H, saa at Punkterne maa ligge paa c^3's Tangenter i G og H. Et Involutionssystem med kun to Fundamentalpunkter, som er sammenhørende Punkter, er altid af den her beskrevne Art, idet der gennem Fundamentalpunkterne og et for de to Involutioner paa d fælles Punktpar gaar et Bundt til Involutionssymet hørende Keglesnit.

Et Involutionssystem af denne Art kan konstrueres paa følgende Maade. Man vælger en vilkaarlig unikursal Kurve k_3 og en vilkaarlig ret Linie l, der skærer k_3 i S, S_1, S_2. De to i k_3's Dobbeltpunkt D faldende Punkter betegnes ved D_1 og D_2 og k_3's Røringspunkter med Tangenterne fra S ved M_1 og M_2. Involutionen paa k_3 bestemt ved Punktparrene S_1S_2 og D_1D_2 har Dobbeltpunkter i M_1 og M_2; der er følgelig en anden Involution paa k_3, der indeholder Punktparrene S_1D_1, S_2D_2, M_1M_2. Dennes Punktpar lader man svare (1, 1) tydigt til l's Punkter, saaledes at til de tre nævnte Punktpar svarer S_1, S_2 og S. Forbindelseslinierne mellem et Punkt P paa l og det tilsvarende Punktpar N_1N_2 paa k_3 indhyller en Kurve c^3 af 3^die^ Klasse, der er unikursal, da dens Tangenter PN_1 svarer (1, 1) tydigt til k_3's Punkter N_1, og den rører k_3 i M_1M_2 og endnu to Punkter, som bliver de eneste Fundamentalpunkter i det ved c^3 som Grundkurve og PM_1 samt PM_1's to andre Skæringspunkter med k_3l som Punktpar bestemte Involutionssystem. Dette er følgelig af den forlangte Art.

Vælges l gennem et Vendepunkt S paa k_3, falder M_1 i S, og c^3 opløser sig i et Keglesnit c^2 og Punktet S. c^2 rører k_3 i M_2 og de to Fundamentalpunkter G og H. I den harmoniske Kollineation med Centrum i S, hvori k_3 svarer til sig selv, vil det samme gælde om Involutionen paa k_3 bestemt ved Punktparrene S_1D_1 og S_2D_2, altsaa om c^2, om det ved k_3l bestemte Involutionssystem og om enhver til Involutionssystemet hørende Kurve k_4. Omvendt har vi her den almindelige Form for Involutionssystemet, hvori $a = 2$, $p = 2$. Til et saadant hører nemlig altid et Bundt Keglesnit (χ_2) med Basispunkter i Fundamentalpunkterne G og H og i to Punkter paa c^2's Tangenter i G og H. c^2 og Bundtet (χ_2), følgelig hele Involutionssystemet, er kollineært med sig selv med Skæringspunktet O mellem GH og de andre Basispunkters Forbindelseslinie som Centrum og O's Polar med Hensyn til c^2 som Akse. Lægges et Keglesnit χ_2 gennem Røringspunkterne paa en af de f Dobbelttangenter t til en vilkaarlig til Involutionssystemet hørende Kurve k_4, vil i Bundtet $k_4 + \lambda \cdot \chi_2^2$ findes en

Kurve sammensat af t, et Keglesnit k_2, der rører c^2 i G og H og endnu en Tangent t_1 til c^2, saaledes at Linieparret tt_1 er sammenhørende med k_2; da i Kollineationen k_2 svarer til sig selv, maa t_1 svare til t. k_4 er altsaa kollineær med sig selv og har fire Dobbelttangenter gaaende gennem O; er χ'_2 Keglesnittet i (χ_2) gennem Røringspunkterne for en af disse (l), vil Bundtet $k_4 + \lambda \cdot \chi'^2_2$ indeholde en til Involutionssystemet hørende Kurve lk_3, hvor k_3 har Vendepunkt i O, og hvor Forbindelsen mellem l's og k_3's Punkter er den ovenfor beskrevne. De $f = 6$ Dobbelttangenter til k_4 deler sig i tre kollineært til sig selv svarende Liniepar, som tt_1, der hører til hver sit af de tre Systemer firdobbelt rørende Keglesnit, som bestemmes af et Par Dobbelttangenter gennem O. Keglesnittet k_2 og de to analoge, der er i System med henholdsvis tt_1 og de to analoge Liniepar, er nemlig forskellige og kan ikke tilhøre samme System, da de alle rører k_4 i G og H.

14. Ifølge 8 er der for $a = 2$ Mulighed for en til Involutionssystemet hørende Kurve sammensat af et Keglesnit og to rette Linier, af hvilke den ene er d, medens den anden l ikke rører c^3 og som sammenhørende Kurve har k_2 talt dobbelt. k_2 maa røre c^3 i G, H og endnu et Punkt R. Tangenten i R maa, for at dens Involution ikke skal blive speciel, gaa gennem l's Skæringspunkt S med d. De fra d forskellige Tangenter til c^3 fra Skæringspunkterne A og B mellem d og k_2 maa af samme Grund gaa gennem hver sit af Skæringspunkterne C og D mellem k_2 og l. d's Punkter og de dermed sammenhørende paa k_2 danner projektive Punktrækker, hvori ABS svarer til CDR. I en harmonisk Kollineation med S til Centrum og S's Polar med Hensyn til k_2 til Akse svarer Punktparrene AC og BD til hinanden, medens SR svarer til sig selv; altsaa vil de to projektive Punktrækker svare til sig selv i Kollineationen, ligesaa c^3, Involutionssystemet og og Bundtet $ldk_2 + \lambda\chi^2_2$, hvor χ_2 er det til Involutionssystemet hørende Keglesnit. Et Involutionssystem som det her beskrevne kan altid konstrueres, idet man vælger k_2 og Linierne d og l vilkaarligt samt R i et af Røringspunkterne for Tangenterne fra d og l's Skæringspunkt til k_2. De to Involutioner paa d danner almindeligt ikke Kvadrupler og falder ikke sammen, da, idet R_1R_2 er d's Røringspunkter med c^3, SA, BR_1 er Punktpar i den ene, SB, AR_2 i den anden; enhver til Involutionssystemet hørende Kurve k_4 maa da røre d i Involutionens fælles Punktpar, k_2 i disse Punkters tilsvarende i den homografiske Forbindelse, l i de med G og H sammenhørende Punkter. k_4 hører følgelig til Bundtet $ldk_2 + \lambda\chi^2_2$.

15. Skal der til et Involutionssystem, hvori $p = 3$, $a = 2$, høre en Kurve sammensat af to sammenhørende Keglesnit k_2 og k'_2, der hver rører c^3 i et af Fundamentalpunkterne G og H, maa if. 10 de fire Fællestangenter til Keglesnittene være almindelige Tangenter til c^3. I den Skare af Keglesnit, som rører disse fire Fællestangenter, har hvert endnu et Par Fællestangenter med c^3; disse Par danner en Involution, hvis Dobbeltelementer er Tangenterne i G og H, og hvori de to i d faldende Tangenter danner et Par. Linien GH er da Tangent til c^3, og G og H er sammenhørende Punkter; her maa nemlig if. 10 AB, BC, CA være Tangenter til c^3, og et Keglesnit gennem $ABCGH$ maa høre til Involutionssystemet Dette er da af den i 13 beskrevne Art. I et saadant Involutionssystem vil man altid kunne faa en Kurve $k_2k'_2$ ved gennem tre Punkter S_1S_2D at lægge to Keglesnit rørende c^3, det ene i G, det andet i H; er χ_2 et Keglesnit i det til Involutionssystemet hørende Bundt, som gaar gennem S_1S_2D, vil nemlig i Bundtet $lk_3 + \lambda \cdot \chi_2^2$ en Kurve være sammensat af de to Keglesnit, og disse maa være sammenhørende, da G paa det ene hører sammen med H paa det andet.

16. Skal der til et Involutionssystem, hvor $p = 3$, $a = 4$, høre en Kurve sammensat af en ret Linie l og en Kurve k_3 af 3[die] Orden, maa if. 8 l være c^3's Dobbelttangent d. k_3 er unikursal og rører c^3 i de fire Fundamentalpunkter. d's Punkter og de sammenhørende Punkter paa k_3 danner projektiviske Rækker, da de svarer (1, 1) tydigt til hinanden. For at til hinanden svarende Punkters Forbindelseslinie skal indhylle en Kurve af 3[die] Klasse, maa i et Skæringspunkt C mellem d og k_3 til hinanden svarende Punkter falde sammen; de to andre Skæringspunkter A og B maa — som Punkter paa d — have deres tilsvarende i de to i k_3's Dobbeltpunkt D faldende Punkter D_1 og D_2, for at der ikke skal opstaa andre Fundamentalpunkter end Røringspunkterne mellem k_3 og c^3. D_1D_2 er et Punktpar i Involutionssystemet. De til A og B som Punkter paa k_3 svarende Punkter R_1 og R_2 paa d er c^3's Røringspunkter med d; da disse forudsættes at være adskilte, og CA, BR_2 er Punktpar i den ene Involution paa d, CB, AR_1 i den anden, kan de to Involutioner ikke falde sammen og ikke danne Kvadrupler. Enhver til Involutionssystemet hørende Kurve k_4 maa da røre d i Involutionernes fælles Punktpar. Følgende Punktpar paa k_3 hører til Involutionssystemet: AC, CB, BD_1, D_1D_2, D_2A; hvert Punkt paa k_3 er følgelig Vinkelspids i en i k_3 indskreven Femkant, hvis Siders Endepunkter er sammenhørende Punkter.

Lad k_3's Ligning være:

$$(y^2 - a^2x^2)(y - bx) + c(y^2 - k^2x^2) = 0,$$

og d være uendelig fjern. For k_3's Punkter bruges Parameterfremstillingen:

$$x = c\frac{k^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 - a^2)(\alpha - b)}, \quad y = c\alpha\frac{k^2 - \alpha^2}{(\alpha^2 - a^2)(\alpha - b)};$$

til A, B, C, D_1, D_2 svarer $\alpha = a, -a, b, k, -k$. Som Parameter for Punktet paa d, der i de projektiviske Rækker svarer til Punktet med Parametren α paa k_3, bruges Retningskoefficienten v for Linier gennem Punktet; man har da:

$$v = \frac{(b^2 - ak)\alpha + akb\left(1 - \frac{k}{a}\right)}{b\left(1 - \frac{k}{a}\right)\alpha + \frac{k}{a}(b^2 - ak)}.$$

Parametrene til de 4 Fundamentalpunkter bestemmes ved Ligningen:

$$\alpha^4\left(\frac{k}{a}b^2 - ak\right) + \alpha^3 \cdot 2b\left(1 - \frac{k}{a}\right)(k^2 - a^2) + \alpha^2 M$$
$$+ \alpha \cdot 2b(a^2 - k^2)(ak - k^2) - a^3k^3 + ak^3b^3 = 0;$$

Udregningen af M er her uden Interesse. Sættes $\alpha = \frac{-ak}{\beta}$, faas efter Division med $\frac{a^2k^2}{\beta^4}$:

$$ak^3b^2 - a^3k^3 - \beta \cdot 2b(ak - k^2)(k^2 - a^2)$$
$$+ \beta^2 M - \beta^3 \cdot 2b\left(1 - \frac{k}{a}\right)(a^2 - k^2) + \beta^4\left(\frac{k}{a}b^2 - ak\right) = 0,$$

der er identisk med den oprindelige Ligning. Fundamentalpunkterne deler sig altsaa i to Punktpar, der hører til den ved BD_1 og AD_2 bestemte Involution.

En Vinkelspids U i en af de i k_3 indskrevne Femkanter og den modstaaende Sides tredie Skæringspunkt V med k_3 svarer $(1, 1)$ tydigt til hinanden, da V svarer homografisk til Sidens Skæringspunkt med d. Lader man i Femkanten $ACBD_1D_2$ U falde i A, falder V i D_2 og omvendt, ligesaa for B og D_1; Punktparrene UV danner altsaa den ovenfor omtalte ved AD_2 og BD_1 bestemte Involution paa k_3, af hvis Punktpar to falder i Fundamentalpunkterne. Har nu en Femkant en Vinkelspids i et Fundamentalpunkt G, maa den modstaaende Sides tredie Skæringspunkt med k_3 falde i et andet Fundamentalpunkt H,

og den modstaaende Side være c^3's Tangent i H. H er ogsaa Vinkelspids i Femkanten, og dens modstaaende Side ligger i c^3's Tangent i G. Er N det med G sammenhørende Punkt paa k_3, der ikke ligger paa Tangenten i G, maa N og H være sammenhørende Punkter; paa samme Maade ses, at de to andre Fundamentalpunkter I og J har et fælles sammenhørende Punkt O. Et Keglesnit χ_2 gennem $GHIJN$ hører if. 6 til Involutionssystemet, ligesaa Bundtet $dk_3 + \lambda \cdot \chi_2^2$; χ_2's Skæringspunkter med d er det for Involutionen paa d fælles Punktpar ST, og deres sammenhørende Punkter udenfor d maa falde i N og O. Enhver til Involutionssystemet hørende Kurve maa røre d i S og T, og k_3 i N, O, G, H, I og J og følgelig høre til Bundtet $dk_3 + \lambda \cdot \chi_2^2$. Et Involutionssystem af den her beskrevne Art vil eksistere for et vilkaarligt Valg af k_3 og d.

17. Med Hensyn til Spørgsmaalet om, hvorvidt der til Involutionssystemer, hvori $p = 3$, $a = 4$, hører Kurver bestaaende af to sammenhørende Keglesnit k_2 og k'_2, kan straks bemærkes, at dette gælder om det nys beskrevne Involutionssystem. Da NG, NH og NS er Tangenter til c^3, røres c^3 — følgelig ogsaa k_3 — i G og H af et Keglesnit, der tillige rører d i S; ligesaa røres c^3 og k_3 i I og J af et Keglesnit, der rører d i T. Disse Keglesnit er firdobbelt rørende til Kurven k_3d; der er nemlig ikke andre egentlige Keglesnit, der rører k_3 i G og H, henh. I og J, og desuden rører d, og G og H, henh. I og J, er Røringspunkter for samme firdobbelt rørende Keglesnit til k_3d. Skærer Tangenterne i G og H d i G_1H_1, kan man nemlig vise, at $(GHAB) = (G_1H_1AB)$, hvoraf Sætningen følger, idet Indhylningskurverne for Forbindelseslinierne mellem tilsvarende Punkter i to projektive Rækker paa d og k_3, hvori A og B svarer til sig selv, er firdobbelt rørende Keglesnit til k_3d af samme System. Man har, idet G og H paa k_3 har Parametrene α og β,

$$(G_1H_1AB) = (GHD_1D_2) = \frac{\alpha - k}{\beta - k} : \frac{\alpha + k}{\beta + k}$$

og

$$(GHAB) = \frac{\alpha - a}{\beta - a} : \frac{\alpha + a}{\beta + a};$$

disse Dobbeltforholds Ligestorhed kræver, under Forudsætning af $\alpha \gtrless \beta$ $k \gtrless a$, $\alpha\beta = -ak$, hvad i 16 er bevist at gælde. De to firdobbelt rørende Keglesnit hører til Bundtet $k_3d + \lambda \cdot \chi_2^2$, da deres Røringspunkter med k_3d ligger paa χ_2; de er sammenhørende Kurver

i Involutionssystemet, da hvert af dem kun indeholder to Fundamentalpunkter. Det her beskrevne Tilfælde er det eneste, hvori der til Involutionssystemet hører en Kurve sammensat af to sammenhørende Keglesnit $k_2 k'_2$, der rører d i to adskilte Punkter S og T; Tilfældet, hvor Røringspunkterne er sammenfaldende, medtages if 11 ikke her. Hvis nemlig to Fundamentalpunkter G og H er sammenhørende Punkter eller har et fælles sammenhørende Punkt P, hører Keglesnittet χ_2 gennem $GHIST$, henh. $GHPST$, til Involutionssystemet, og i Bundtet $k_2 k'_2 + \lambda \cdot \chi_2^2$ forekommer Kurven $k_3 d$. Ellers vil et til Involutionssystemet hørende Bundt Kurver k_4 have Basispunkter i $GHIJ$ og i disse Punkters sammenhørende $LMNO$, der er indbyrdes forskellige og forskellige fra Fundamentalpunkterne. $GHNOS$ ligger paa k_2, $IJLMT$ paa k'_2. GL, HM og den enkelte Tangent til c^3 fra S skærer hinanden i P; IN, JO og den enkelte Tangent til c^3 fra T skærer hinanden i Q. Til Bundtet hører et Keglesnit χ_2 talt dobbelt, og Bundtets Kurver har simpel Røring i alle Basispunkter, hvoraf følger (4), at c^3 ikke gaar gennem L, M, N eller O. Da maa L og ligesaa M have sammenhørende Punkter i N og O, og LN, LO, MN, MO rører c^3. Følgende 3 Kurver af 3^die^ Klasse: c^3, QLM og PNO rører alle de samme 8 Linier og maa altsaa have endnu en fælles Tangent, nemlig PQ. Men naar P og Q ligger paa samme Tangent til c^3, kan S og T ikke være adskilte.

Er to fra d forskellige Tangenter t_1 og t_2 til c^3 Fællestangenter til k_2 og k'_2, har vi if. 10 det Tilfælde, hvor AB, AC, BD rører c^3, og hvor l er fælles Polar for Skæringspunktet mellem AB og CD med Hensyn til k_2 og k'_2. Regning viser, hvorledes man kan sørge for, at Indhyllingskurven af 3^die^ Klasse bliver unikursal. Et Keglesnit χ_2 gennem Fundamentalpunkterne, der skærer en vilkaarlig Tangent t i et Punktpar, maa ogsaa gaa gennem et Punktpar paa den kollineære (10) Tangent; det hører da til Involutionssystemet, og det samme gælder om Kurverne i Bundtet $k_2 k'_2 + \lambda \cdot \chi_2^2$. Omvendt vil enhver til Involutionssystemet hørende Kurve k_4 indgaa i dette Bundt.

18. Betragtes endeligt et Involutionssystem, hvor $p = 3$, $a = 6$, kan vi som bestemmende Kurve for et Bundt til Involutionssystemet hørende Kurver k_4 foruden et Keglesnit talt dobbelt kun bruge to sammenhørende Keglesnit k_2 og k'_2, da der er 6 Fundamentalpunkter; af disse ligger 3 paa hvert af Keglesnittene. Da k_2 og k'_2 er 3-dobbelt rørende til c^3, vil Ligningen, der bestemmer Abscisserne til en vilkaarlig Tangent t's Skæringspunkter med et af dem dele sig i to af 1^ste^

Grad i x, den ene af 2den, den anden af 4de Grad i τ. Betragtes et Punkt S paa k_2, og søger man Abscissen x til det sammenhørende Punkt paa den Tangent, hvis Parameter τ sammen med S's Abscisse x tilfredsstiller den første Ligning, faar man, da φ er af 6te Grad i τ, efter Bortdivision af R og de tre lineære Faktorer, der svarer til Fundamentalpunkterne paa k_2, en Ligning af 1ste Grad i x og 2den Grad i τ, hvoraf følger, at det sammenhørende Punkt paa k'_2 beskriver en Punktrække, der er projektivisk med den af S paa k_2 beskrevne. Da Forbindelseslinierne mellem til hinanden svarende Punkter i projektiviske Rækker paa to Keglesnit indhyller en Kurve af 4de Klasse, maa et Skæringspunkt D mellem k_2 og k'_2 svare til sig selv, og paa hver Tangent t fra D maa to sammenhørende Punkter falde sammen i D; er der fire adskilte Skæringspunkter mellem k_2 og k'_2, maa i hvert af de tre andre Skæringspunkter A, B, C paa to Tangenter derigennem to ikke sammenhørende Punkter falde sammen, og da der ikke i disse Punkter maa opstaa Fundamentalpunkter, maa AB, BC og CA tangere c^3, men da er der if. 10 ikke noget til Involutionssystemet hørende Keglesnit, der ikke indeholder Punkterne A, B og C. Hvis k_2 og k'_2 rører hinanden i C, medens AB og BC er Tangenter til c^3, maa i de projektiviske Rækker Punktet B paa k_2 svare til A paa k'_2, medens B som Punkt paa k'_2 svarer til C paa k_2, og intet af Punkterne A, B og C kan svare til sig selv. Den anvendte Metode fører følgeligt her ikke til nogen til Involutionssystemet hørende Kurve af 4de Orden og Slægten 3.

Nogle Bemærkninger om Fermat's Taltheori.

Af J. P. Gram.

Den af *P. Tannery* og *Ch. Henry* for faa Aar siden foranstaltede nye Udgave af *Fermats* Værker har i høj Grad bidraget til at vække Interessen for et fornyet Studium af denne berømte Mathematikers originale Produktion. Ikke blot er den nu bleven let tilgjængelig, men til de ældre Aktstykker er der i den nye Udgave føjet adskillige nye og deriblandt nogle, som kaste et klarere Lys over dunkle Punkter. Professor *Zeuthen* har i sine historiske Arbejder vist, hvor stort et Udbytte til Forstaaelsen af Infinitesimalregningens moderne Udvikling man kan hente sig af et grundigt Studium af *Fermats* Afhandlinger, og han har i sin Mathematikens Historie med øjensynlig Beundring udførlig omtalt denne mærkelige Mands grundlæggende Opdagelser.

For den, som ikke læser de gamles Værker af historisk Interesse, vil det sikkert blive *Fermats* Taltheori, som vil frembyde den største Interesse. *Fermat* er ubestridt Skaberen af Grundlaget for den moderne Taltheori. Med hans Sætninger som Udgangspunkt har Eftertidens store Mathematikere opført en Bygning, som i visse Henseender er ret storstilet, men som dog i mange Enkeltheder endnu bærer Præget af dens første Ophavsmand. Den i videste Forstand elementære Del af Taltheorien indbefatter nu langt mere end hvad *Fermat* nogensinde har drømt om, og en Nutids Mathematiker, der kan sine Ting, vil derfor ikke hente sig nogen større ny positiv Kundskab ved at læse *Fermats* Diofantnoter eller de Breve, som omhandle taltheoretiske Spørgsmaal. Og dog vil han finde Læsningen baade underholdende og tiltrækkende. Der er over disse gamle Breve en Friskhed og en fornøjelig Tone, som tiltaler; man kommer uvilkaarlig til at holde af denne Mand, som med en velgjørende Frimodighed

meddeler snart til en snart til en anden de mærkelige Sætninger, han har fundet, og man faar en vis Medfølelse med ham, naar man ser, hvorledes den ene efter den anden af hans Korrespondenter mangler Forstaaelse af og Interesse for hans Undersøgelser i Tallenes Verden. *Fermat* har aldrig haft Lejlighed til at meddele sig til en — jeg vil ikke sige jævnbyrdig — men endog blot virkelig forstaaende Samtidig, der fuldt ud kunde vurdere hans nye Taltheori.

Anderledes var det, naar han bevægede sig paa kjendte Omraader. *Diofant* havde i Oldtiden lært at behandle de saakaldte dobbelte Ligninger og gjennem *Leonardo Pisano, Vieta, Bachet* og andre ældre Forfattere var disse Ligningers Behandling velkendt, og ubestemte Opgaver af den Art yndede af Datidens Mathematikere. Den allerstørste Del af *Fermats* mærkelige Diofantnoter handler om saadanne Ligninger og om de med dem analoge »tredobbelte Ligninger«, hvilke *Fermat* erklærer for sin egen Opfindelse. *Fermats* vigtigste Ydelse paa dette Felt er »hans Methode« til af en funden Løsning $x = a$ at aflede en ny ved at indsætte $x = y + a$ i Ligningen og derefter bestemme y. Af denne Fremgangsmaade gjør han hyppig Anvendelse. De til dette Omraade hørende Diofantnoter ere saa tydelige, at de næsten ikke frembyde nogen Vanskelighed, naar man blot nøje følger *Fermats* Anvisninger. De vare fuldt forstaaelige for Samtiden, og umiddelbart efter *Fermats* Død gav Pater *Jacques de Billy* endog en samlet Fremstilling af hele denne Theori paa Grundlag af Breve og andre Meddelelser fra *Fermat* selv, hvilken under Titlen »Inventum novum« blev optaget i Diofantudgaven af 1670, der ogsaa indeholder *Fermats* Noter. Om denne Del af *Fermats* Taltheori vide vi altsaa fuldstændig Besked, og det samme kan siges om de dermed i nær Forbindelse staaende talrige Opgaver, som vedrøre Dannelsen af rationale retvinklede Trekanter. Vor Tid interesserer sig kun lidet for den Slags Opgaver, som for Nutids Mathematikeren kun frembyder ringe Interesse. Imidlertid give netop Diofantnoterne et fortrinligt Indblik i *Fermats* overordentlige Evne til at vælge den simpleste Formulering af Opgaverne og til at sætte dem i Ligning, saaledes at Løsningen kan ske paa en overkommelig Maade. Vil man gjøre sig Haab om at sætte sig fuldstændig ind i hans Tankegang, da vil et Studium af Diofantnoterne saavelsom af den ældre Literatur være en nødvendig Forberedelse.

Diofantnoterne indeholde endnu forskjellige Meddelelser om nogle af *Fermats* andre Opdagelser. Den næstførste Note (Diofant II, 8) indeholder saaledes den berømte Sætning om Umuligheden af Ligningen

$x^n + y^n = z^n$. Den lyder ordret saaledes: »Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.«

Dette er overhovedet det eneste Sted, hvor Sætningen udtales i fuld Almindelighed; i en af de sidste Noter gives derimod det fuldstændige Bevis for Umuligheden af $x^4 - y^4 = z^2$.

Endvidere anføres i Noten til Diofant IV, 31, at ethvert Tal kan skrives som en Sum af højst 3 Trigonaltal, 4 Kvadrattal, 5 Femkantstal osv.... Om dette Æmne vil *F.* »skrive et Værk, og i den Retning udvide Arithmetiken paa vidunderlig Vis udover de gamle bekjendte Grænser«.

Ligeledes findes Meddelelser om Primtal af Formen $4n + 1$ som Summer af to Kvadrater (Diofant III, 22), og enkelte andre Hentydninger af mindre Vigtighed til Sætninger, som forekomme i Korrespondancen fra meget forskjellige Tider.

I Noten til Diofant VI, 19 anføres saaledes den Sætning, at $x^2 + 2 = y^3$ kun har den ene Løsning $x = 5$, $y = 3$, hvilken omtales i et Brev til *Digby* af $^{15}/_8$ 1657 sammen med den lignende Sætning, at $x^2 + 4 = y^3$ kun kan tilfredsstilles ved $x = 2$, $y = 2$ og $x = 11$, $y = 5$. Af dette Brev fremgaar, at *Fermat* har sendt den første af disse Opgaver til *Frénicle*, men at denne ikke har svaret paa hans sidste Brev. *Fermat* forelægger nu tillige den anden Opgave saavel for *Frénicle* som for de engelske Mathematikere (*Wallis* og *Brouncker*). I samme Brev omtales ydermere den Opgave at omskrive en Sum af to Kuber til en Sum af to andre Kuber, hvilken Opgave er løst i Noten til Diofant IV, 3.

Man faar af *Fermats* Breve det Indtryk, at han først og fremmest meddeler de Undersøgelser, som han i Øjeblikket beskjæftiger sig med, og de sidst anførte Opgavers Løsning maa da henføres til omkring Aaret 1657, hvad der ogsaa meget vel kan passe, og i saa Fald kunne Diofantnoterne ikke være afsluttede før den Tid.

Derimod er det et Spørgsmaal, om de ere affattede paa et bestemt Tidspunkt eller i Løbet af en Aarrække. For den sidste Antagelse kunde tale, at der i Noterne findes Beretning om vigtige Sætninger, som omtales i Korrespondancer fra højst forskjellige Tidspunkter, helt tilbage til 1636. Det er ogsaa sikkert nok, at det er Noterne til de sidste Opgaver i VI Bog, som maa anses for de først indførte, idet *Fermat* i foranstaaende Noter henviser til dem. En

enkelt Note (Diofant V, 25) er endog vitterlig skreven til forskjellige Tider, idet *F.* ved en Revision har opdaget en Fejl, som giver ham Anledning til en ny Bemærkning. Der vil ej heller være noget der taler imod, at navnlig den store Note til Diofant VI, 26, hvori bevises Umuligheden af $x^4 - y^4 = z^2$ — hvilken Sætning var *Fermat* bekjendt allerede i 1636 — kan være affattet paa selve dette Tidspunkt. Det er netop den Opgave af *Bachet* — at finde en Trekant, hvis Areal er et givet Tal — ved hvilken den er anført, der har givet Anledning til, at *Fermat* beviser den Sætning, at en rational retvinklet Trekants Areal ikke kan være noget Kvadrattal, og det kunde være ret naturligt, om han saa strax indførte dette Bevis i sin Diofant, der formodentlig paa dette Sted har haft en aaben Plads, fordi der slutter et Afsnit. Og naar der først var sat en Note, saa vilde der efterhaanden af sig selv komme flere.

Noget urimeligt er der altsaa ikke i at antage, at Noterne ere blevne til i Løbet af en Aarrække. Naar jeg alligevel er mest tilbøjelig til at tro, at den største Del af dem er affattet under et i Tiden omkring 1660, da er denne Mening begrundet i Noternes Form og Udtryksmaade. De gjøre nemlig slet ikke Indtrykket af, at *F.* har skrevet dem for sin egen Skyld. Hvis det var Tilfældet, vilde de have været endnu kortere end de er; det kan ikke nægtes, at der hist og her er et Skjær af en vis docerende Vidtløftighed over dem.

Ligesaa lidt kan det antages, at de af Forfatteren vare bestemte til at publiceres i den foreliggende Form. Naar *Fermat* f. Ex. i Anledning af sin først angivne urigtige Løsning til Diofant V, 25 siger følgende: »Da jeg atter gjennemsaa, hvad jeg har skrevet, syntes jeg strax, at jeg burde slette det hele ud, fordi denne Opgave slet ikke kan henføres til den af mig behandlede. Da jeg dog har givet den rigtige Løsning af den anden Opgave, til hvilken jeg fejlagtig har reduceret den forelagte, saa er Arbejdet ikke spildt, om end nok ilde anbragt, og jeg lader derfor Randbemærkningen blive staaende«, saa vil man vel nok indrømme, at saaledes skriver man ikke i den Hensigt at lade det skrevne trykke. Saa sætter man den rigtige Løsning i Spidsen.

Men det forekommer mig dog uden for al Tvivl, at *Fermat* maa have skrevet sine Anmærkninger med den bestemte Hensigt, at de skulde være Meddelelser til andre, enten til Efterverdenen i Almindelighed eller snarere til en bestemt Person, f. Ex. *Frénicle* eller maaske *Billy*, der øjensynlig har baade læst og forstaaet dem og selv

siger, at han har sin Kundskab fra *Fermat.* Er denne min Anskuelse rigtig, da bliver Flertallet af Diofantnoterne at sidestille med et Par af Brevene til *Digby* fra 1658 og navnlig med det vigtige Brev til *Carcavi* af August 1659, »Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres«, Aktsykker, i hvilke *Fermat* lægger an paa i kort Begreb at give et Resumé af sine vigtigste Opdagelser paa Taltheoriens Omraade for at samle dem under et, saa de ikke skulle gaa tabt. Han siger selv udtrykkelig, at han nu ikke mere har Tid til at redigere Beviserne og fremstille sine Methoder, som han kunde have ønsket det. At han tidligere har haft en saadan Plan for Øje, derom bærer selve Diofantnoterne Vidnesbyrd, saaledes som ovenfor er anført, men netop den paagældende Note (Diofant IV, 31) kan være en af de ældste.

I langt højere Grad end Diofantnoterne giver *Fermats* omfattende Korrespondance detaillerede Oplysninger om den Del af hans Taltheori, der har faaet fundamental Betydning, idet en stor Mængde af de os overleverede 118 Breve, som ere offentliggjorte i T. II af *Fermats* Oeuvres, indeholde større eller mindre Udtalelser om taltheoretiske Spørgsmaal. En særlig Stilling indtager i denne Henseende den Snes Breve, der tilhører Tiden fra 1640 til 1644, og som indeholder en Række Meddelelser, der mer eller mindre direkte vare bestemte for *Frénicle.* Det er i disse, at »Fermats Theorem« $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, fremsættes og uddybes.

Ved Aar 1643 synes Forbindelsen med *Frénicle* at være bleven afbrudt, og de Breve, der tilhøre Tiden mellem 1644 og 1656, ere kun af ringe Tal og give intet nyt paa Taltheoriens Omraade. I 1657 fremsættes bl. a. Sætningen om, at $ax^2 + 1 = y^2$ altid har uendelig mange Løsninger, og i det hele taget indeholde Brevene fra Aarene 1657—59 højst værdifulde Oplysninger, dog mindre om nye Sætninger end om den Fremgangsmaade, *Fermat* har anvendt. Disse Breve, som navnlig ere adresserede til *Digby* og *Carcavi,* indeholde tildels samlede Oversigter over de vigtigste af *Fermats* Opdagelser i Læren om de hele Tal.

De tidligste Breve ere fra 1636, og lige til 1646 ere de allerstørste Del af Brevene adresserede til *Mersenne,* idet denne agerede Mellemmand mellem Datidens lærde Mathematikere. Taltheoretiske Spørgsmaal forekomme i Brevene før 1640 af og til, navnlig i Samkvemmet med *Roberval,* og de paagjældende Breve have særlig Interesse ved at vise *Fermats* Standpunkt før Forbindelsen med *Frénicle.*

Vi se da *Fermat* allerede i 1636 sysle med Opgaver, vedrørende Tals Fremstilling ved Summer af Kvadrater. *Diofant* har stiltiende forudsat, at ethvert Tal kan skrives som en Sum af højst 4 Kvadrattal, *Bachet* havde prøvet Sagen numerisk, men noget Bevis var ikke leveret. I et Brev af $^{15}/_7$ 1636 meddeler *Fermat* Løsningen af en Opgave stillet af *Sainte-Croix*, nemlig at finde to Tal, som hvert for sig tilligemed med deres Sum er sammensat af 3 Kvadrater. Hans Løsning er følgende. Antag $n = a^2 + b^2 + c^2$, $m^2 = d^2 + e^2$, saa vil de søgte Tal være nd^2, ne^2 og $nm^2 = m^2a^2 + (d^2 + e^2)(b^2 + c^2)$, eftersom det sidste Produkt kan skrives som en Sum af to Kvadrater. *F.* tilføjer, at han har fundet, at naar $m^2y = n^2x$, saa vil x og y samtidig være Summer af 3 Kvadrattal — hvilket ikke kan opfattes som en Omvending af den foregaaende Opgave — samt flere andre meget smukke Sætninger. Han arbejder fremdeles paa disse og erkjender, at Minimums-Antallet af Kvadrater, hvori ethvert Tal kan opløses, maa opfattes som konstant, men er øjensynlig endnu famlende. Han spørger f. Ex. $^{16}/_9$ *Roberval* om Bevis for, at x, bestemt af Ligningen

$$x^2 + 2(a + b)x = a^2 + b^2,$$

er irrational, naar a og b ere rationale, hvilket *Fermat* mener er rigtigt, men endnu ikke kan bevise.

Opgaven refererer sig til *Euklids* 10. Bog, og der kan derfor maaske være Tvivl om, hvad der skal forstaas ved en »rational« Størrelse. Tage vi denne i moderne Forstand, skal $(a + b)^2 + a^2 + b^2$ være et Kvadrat, en Ligning, der ogsaa kan omskrives til $2r^2 = 3s^2 + t^2$ eller $2(r^2 + t^2) = 3(s^2 + t^2)$. Det skulde ikke undre mig, om vi netop i denne kunne finde den første Anledning til Beviset for, at intet Primtal af Formen $4n + 3$ gaar op i en Sum af to (indbyrdes primiske) Kvadrattal, hvilket uden Tvivl skriver sig fra dette Tidspunkt.

Men allerede i samme eller næste Maaned ere Vanskelighederne overvundne og *Fermat* meddeler da i et langt Brev bestemt til *Sainte-Croix* den store Sætning, at ethvert Tal er en Sum af højst 3 Trekantstal, 4 Kvadrattal osv., for hvilken han vil give Bevis, dersom *S.-C.* ikke kan finde det. Som Tillæg siges, at $8n + 7$ kræver 4 Kvadrater i Summen, hvad enten de ere hele er brudne. Betydningen og Rækkevidden af disse Sætninger er *Fermat* ganske klar.

Dette samme Brev indeholder endnu flere mærkelige Ting. Det begynder med, at *F.* stiller 4 Opgaver, idet han vælger »vanskelige Spørgsmaal«, deriblandt

1⁰) At finde en retvinklet Trekant, hvis Areal er et Kvadrat;

3) At finde to Bikvadrater, hvis Sum er et Bikvadrat eller to Kuber, hvis Sum er et Kubus.

Heraf ses, at *Fermat* allerede paa dette Tidspunkt beskjæftiger sig med disse umulige Opgaver; om han er kommen til Ende med dem, kan dog ikke ses, for den førstes Vedkommende kan der næppe være Tvivl.

Ydermere indeholder Brevet en Fremstilling af *Fermats* Summation af Differensrækker af højere Orden som viser, at han er fuldstændig Herre over denne Sag og kjender Polygonaltallenes Opløsning i Faktorer, m. a. O. Binomialkoefficienternes Sammensætning, en Opdagelse, som *Pascal* først gjør i 1654. Den samme Sætning meddeler *F.* ligeledes i November s. A. til *Roberval*; den omtales ogsaa i den sidste Diofantnote (til Opg. IX i Bogen om Polygonaltallene), og *Fermat* har anvendt den ved sine første Parabelkvadraturer.

Jævnsides med de omtalte Undersøgelser over Tallenes Sammensætning af Kvadrattal løbe andre Spekulationer, dels over Tryllekvadrater — hvor *Fermat* ogsaa udvider sine Undersøgelser til »Tryllekuber« — dels over saakaldte fuldkomne Tal, »nombres, parfaits«, d. v. s. saadanne Tal, som ere lig med Summen af deres Divisorer. Disse Spekulationer var den Gang i høj Kurs, man betragtede ligeledes »nombres aliquotaires«, hvor Forholdet mellem Tal og Divisorsum er forskjelligt fra 1, og »nombres amiables«, to Tal, af hvilke ethvert er lig med det andets Divisorsum.

De fuldkomne Tal have Typen $\varepsilon_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$, og saavel p som $2^p - 1$ skulle være Primtal.

Fermat har opnaaet ikkc ringe Færdighed i at behandle den Slags Opgaver, som i sidste Instans gaa ud paa at afgjøre, om visse Tal, f. Ex. $2^p - 1$, er Primtal eller ikke.

I 1643 har *F.* i et Brev til *Mersenne* meddelt, hvorledes han for at undersøge, om et Tal var et Primtal eller ikke, anvendte en Fremgangsmaade, som gik ud paa at opløse det givne Tal i en Differens af 2 Kvadrattal. Dette er vel bekjendt, derimod tror jeg ikke, man har været opmærksom paa, at han i et Brev til *Frénicle* af $^{18}/_{10}$ 1640 meddeler en lille Sætning, som uden Tvivl indeholder endnu en anden Regneregel. Sætningen er følgende: Antag, at q gaar op i $N = ap + r$, saa vil q ogsaa gaa op i $a(p-q) + r$. Den synes os ganske triviel, men *F.* mener dog, at *Frénicle* kan finde Anvendelse for den. Det kunde være rimeligt nok. Antage vi, at p og q ere to paa hinanden følgende Primtal og $q < p$, saa faas

$$N = ap + r = aq + a(p-q) + r = (a+m)q + r_1,$$

idet $a(p-q)+r=mq+r_1$, og derved en simpel Regel til fra Kvotient og Rest for Primtallet p at komme til de tilsvarende Tal for q. *Fermat* nøjes med Antydninger men omtaler forøvrigt baade Tilfældet $p>q$ og $p<q$.

Fra hvilket Tidspunkt disse to Methoder skrive sig vide vi ikke, men *Fermat* siger selv i et Brev til *Mersenne* af $^{26}/_{12}$ 1638, at han da ikke har anden Fremgangsmaade end Divisioner, og dette generer ham. Han har imidlertid faaet at vide, at *Frénicle* skal være i Besiddelse af en bedre Methode, og vil gjerne i Forbindelse med denne Mand, men det vil ikke lykkes ham. Først i Marts 1640 fremkommer der et Brev fra *Frénicle* til *Mersenne,* foranlediget ved, at sidstnævnte har forelagt Brevskriveren *Fermats* Undersøgelser over Tryllekvadrater. *Frénicle* udtaler sig ret overlegent om disse og ender med at bede *Mersenne* anmode *Fermat* om at angive et fuldkomment Tal, som har 20 Cifre eller det nærmeste derefter — »for at han ikke skal komme ud over, hvad han kjender tilbunds« — »et j'estime qu'il en viendra d'autant plus facilement à bout, qu'il pourra sur tout ce que dessus consulter l'oracle de ce grand démon dont vous nous avez fait tant de fête, lequel nous tiendrons pour bon ange et des plus blancs, si'l y satisfait. Encore que, s'ils étoient versés en ces matières-la comme le sont vos Sainte-Croix et Frénicle, cela leur serviroit plutôt d'ébattement que de travail, vu qu'il y a longtemps qu'ils ont trouvé et considéré ces choses-là.«

Havde M. *Frénicle* kjendt M. *Fermat*, vilde han nok have taget sig lidt bedre iagt! Brevet synes at have krydset et Brev fra *Fermat* af 1. April, men Svaret kommer formentlig i Maj. Deri siger *Fermat*, at han nu har fundet forskjellige kortere Fremgangsmaader til at finde fuldkomne Tal, og at der slet ikke findes noget saadant med 20 eller 21 Cifre; men han forelægger paa sin Side *Frénicle* 4 Opgaver, hvoraf 3 umulige, deriblandt de, som vi ovenfor have omtalt som tidligere forelagte *Sainte-Croix.* — Saa har *Frénicle* øjensynlig maattet gjøre en Undskyldning, og *Fermat* begynder allerede i Juni sine Meddelelser til ham.

Før disse har *Fermat* altsaa allerede i 1636 bevist Sætningerne om Tallenes Dekomposition i 4 Kvadrater osv. og sikkert ogsaa den om Umuligheden af Ligningen $x^4-y^4=z^2$. Den sidstes Bevis benytter ikke andre nye Sætninger end den, at $x^2=a^2+2b^2$ medfører, at x har samme Form, og til Bevis for denne kræves ingen særlige Forudsætninger. Derimod have vi desværre ikke tilsvarende Oplysninger om Beviset for den førstnævnte Sætning. I et Brev til *Pascal* af

$^{25}/_{9}$ 1654 siger *F.*, at han vil sende *Saint-Martin* et »abrégé« af sine vigtigste Opdagelser i Tallenes Verden og som det vigtigste denne Sætning. For at komme til den maa man bevise, at ethvert Primtal af Formen $4n + 1$ er en Sum af 2 Kvadrater. Derefter anføres den Opgave at bestemme disse Kvadrater, endvidere Sætningerne

$$p = 3n + 1 = a^2 + 3b^2,\ p = 8n + \left.\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right\} = a^2 + 2b^2, \text{ og at } x^4 - y^4 = z^2$$

er umulig. Men om nogen af disse skal benyttes ved Beviset fremgaar ikke. I »Relation« siges, at Sætningen kan bevises ved Reduktion (»la descente«).

Men trods disse Oplysningers Knaphed, vise de dog, at *Fermat* maa have bevist Sætningen paa en ganske anden Maade end den, som vi pleje at benytte; jeg tænker nærmest paa den, der først er anvendt af *Euler* og *Lagrange*. Mer eller mindre direkte anvende vi nemlig »Fermats Theorem« bl. a. til Bevis for Hjælpesætningen om Primtal af Formen $4n + 1$. Men den nævnte Sætning:

$$a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

kan *Fermat* efter de citerede Breve at dømme ikke have været i Besiddelse af førend i 1640, medens Dekompositions-Sætningen allerede er bevist af ham i 1636.

Her er i Virkeligheden et ret gaadefuldt Punkt, hvis Belysning maaske kunde bidrage til at kaste noget Lys over *Fermats* Bevismethode paa dette Stadium; jeg anser det ikke for aldeles umuligt at komme paa Sporet, maaske kan der i et eller andet mindre bekjendt Bevis for Sætningen findes Tanker, som kunne lede i den rigtige Retning.

Har *Fermat* virkelig paa den antydede Vis udført sit Bevis i 1636, da har han ogsaa nok kunnet føre Beviset for, at ethvert Primtal af Formen $3n + 1$ kan skrives paa Formen $a^2 + 3b^2$, og han har da ogsaa kunnet føre Bevis for Umuligheden af $x^3 + y^3 = z^3$. I Noten til Diofant IV, 12 omtaler han, at $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$ maa være sammensat af 3 og Primtal $3n + 1$, og dette tyder paa, at hans Bevis kan have været nær beslægtet med det, som senere fandtes af *Euler*. Men hvis saa er, maa jeg betvivle, at Beviset kan føres tilbage til Tiden før 1640, jeg vilde snarere tro, at *Fermat* paa dette Tidspunkt vel har været overtydet om, at $x^3 + y^3 = z^3$ var umulig, men at Beviset derfor maa henføres til Tiden efter 1654, da *Fermat* først paa dette Tidspunkt fremsætter Opgaver, som omhandle Kubiktal, f. Ex. den

at omskrive $a^3 \pm b^3$ til $x^3 \pm y^3$; $x^2 + 2 = y^3$ osv. — I Brevene fra Aarene omkring 1657 anfører *Fermat* gjentagne Gange Umuligheden af $x^n + y^n = z^n$ for $n = 3$ og $n = 4$ som Sætninger, for hvis Beviser han tillægger sig Fortjenesten. Men det er værd at lægge Mærke til, at han intet Steds i Brevene omtaler den almindelige Sætning for n vilkaarlig. Deraf maa det være tilladt at slutte, at han endnu i 1659 ikke har kjendt denne Sætning, eller i hvert Fald ikke kunnet bevise den; thi ellers vilde han dog sikkert ikke have undladt at omtale den ved Siden af sine andre vigtige Opdagelser. Han kan naturligvis have fundet dette Bevis senere, og dette vil da støtte den ovenfor omtalte Formening, at Diofantnoterne skyldes hans seneste Leveaar.

Man kunde herimod indvende, at Sætningen $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, »Fermats Theorem« ej heller omtales andre Steder end i to Breve til *Frénicle* fra 1640, men ikke i de samme refererende Breve fra 1657—59, som vi ovenfor have nævnt. Selv om *Fermat* ikke har kunnet ane, at denne Sætning skulde blive en af Taltheoriens Grundpiller, var han sig dog sikkert bevidst, at dens Betydning var stor nok til, at den burde medregnes til hans vigtigste Opdagelser. Men at han ikke nævner den, turde have en ganske særlig Grund nemlig den, at *Fermat* ikke har turdet gjøre Krav paa Prioriteten med Hensyn til Opstillingen af denne Sætning. Det fremgaar nemlig tydelig nok af de Breve, som indlede Korrespondancen mellem *Fermat* og *Frénicle,* at denne sidste og *Sainte-Croix* har været i Besiddelse af et eller andet Middel til at lette sig Undersøgelsen af, hvilke Primtal der gaa op i Tal af Formen $2^n - 1$, og at *Frénicle* f. Ex. har vidst, at $2^{37} - 1$ var deleligt med 223. Dette kan kun betyde, at han har vidst, at $2^n - 1$ alene kunde have Divisorer af Formen $2\lambda n + 1$, hvilket er en Del af *Fermats* Sætning. *Fermat* selv anerkjender til en Tid beredvillig *Frénicles* Overlegenhed paa dette specielle Omraade, og der maa have været en bestemt Grund dertil. Det ligger da ogsaa saare nær at bemærke, at der maa være en Periodicitet i de Rester, som fremkomme ved at dividere sukcessive Potenser af 2 med et og samme Primtal p, og at Perioden ikke kan have flere end p Led. Der maa altsaa være to Potenser, som give samme Rest, m. a. O. en Værdi af λ, som giver $2^\lambda \equiv 1 \pmod{p}$, og at λ er et Submultiplum af $p - 1$ har man kunnet opdage ved at prøve sig frem med smaa Primtal. Jeg anser det for højst sandsynligt, at *Frénicle* har vidst saa meget, men derimod ikke, at han har kunnet bevise det.

Dette har *Fermat* derimod været i Stand til, og den Form, han giver Sætningen, hvor den første Gang omtales (Brev af $^4/_8$ 1640), nemlig med vore Betegnelser: $2^p - 2 \equiv 0 \pmod{2p}$, giver endog en Antydning af, at *Fermat*, der udtrykkelig siger, at han har bevist den »non sans peine«, har baseret sit Bevis paa Udviklingen af $(1 + 1)^p$ efter Binomialformlen. Der er ingen Tvivl om, at denne Sætning er fundet ganske kort før Brevets Afsendelse; *Fermat* siger ogsaa selv, at han er i Begyndelsen af sine Undersøgelser i nævnte Retning. Men han gaar rask frem og kan allerede i Oktober s. A. sende den fuldstændige Sætning: $a^\lambda - 1 \equiv 0 \bmod p$, naar λ er enten $p - 1$ eller et Submultiplum deraf, og han vilde have sendt Beviset, hvis det ikke havde været alt for langt.

I denne Form bærer Sætningen med Rette *Fermats* Navn; ingen af hans Samtidige vilde være faldne paa at opstille en saa almindelig Sætning og endnu mindre været i Stand til at bevise den. *Fermat* kunde med god Ret have opført den blandt sine nævneværdige Opdagelser i Taltheorien, men han var stor nok til ogsaa at kunne undlade det.

Efter Brevet af $^4/_8$ følge Opdagelserne Slag i Slag, og man har paa dette Tidspunkt mer end nogensinde et Indtryk af at se *Fermat* i Arbejde. Han uddyber Konsekvenserne af Hovedsætningen og kommer samtidig ind paa forskjellige Sætninger, som vi nu henregner til Læren om kvadratiske Rester. Jeg skal ikke her gaa ind paa disse Sætninger, som ere vel kjendte og beviste af *Euler* og *Gauss*.

Derimod skal jeg omtale den berømte urigtige Paastand, at $2^{2^n}+1$ altid skulde være et Primtal.

Den forekommer første Gang i et Brev til *Frénicle* af Aug. 1640, hvori *Fermat* siger, at han er næsten overbevist om, at alle Tal i Rækken 3, 5, 17 ... (han anfører de 7 første) er Primtal. Han har ikke noget exakt Bevis, men han har udelukket saa mange Divisorer og har saa megen Klarhed over Sagen, at han ikke kan tro, han tager Fejl. *Frénicle*, af hvis Breve vi desværre kun besidde enkelte, har øjensynlig bestyrket *Fermat* i hans Opfattelse; i sit Brev af $^{18}/_{10}$ erkender sidstnævnte, at han stadigvæk ikke kan bevise Sætningen, men dog tror paa dens Rigtighed og vil være glad, hvis *Frénicle* kan meddele ham et Bevis. Den $^{25}/_{12}$ spørger han direkte *Frénicle* om Grunden til, at denne Sætning gjælder, det er ham om at gjøre at faa et Middel til at angive et Primtal saa stort det skal være, og han vil gjerne vide, om hans Tanke er rigtig, naar han formoder, at Tal af Formlen $(2m)^{2^n} + 1$ altid vil være Primtal, hvis de ikke ere delelige

med et af Tallene 3, 5, 17, 257 osv. — Vi vide ikke, hvad *Frénicle* har svaret. — Saa høre vi ikke noget om Sætningen før 29/8 1654, da *Fermat* beder *Pascal* se paa den, og dernæst i et Brev til *Digby* fra 1658; i begge disse Breve siger *Fermat* ligefrem, at han ikke kan bevise Sætningen fuldstændig, men stiller Beviset som Opgave. Endelig nævnes Sætningen noget mindre reserveret i »Relation« af 1659, og citeres ligeledes i »Dissertatio tripartita« som en Sætning, om hvilken *Fermat* forlængst har oplyst Mathematikerne.

Det fremgaar heraf, at *Fermat* ganske vist har været fuldt overtydet om Sætningens Rigtighed, men at han idetmindste før 1659 stedse har erkjendt, at han ikke var i Stand til at bevise den fuldtud. Denne Tilstaaelse giver en god Prøve paa *Fermats* Frimodighed i hans Udsagn om, hvad han ikke kunde bevise, og man kan vel derfor nok stole paa, at naar han paastaar, at han kan bevise noget, da har han ogsaa virkelig haft et Bevis, hvilket dog ikke nødvendigvis behøver at have været uangribeligt.

Iøvrigt er det mærkeligt, at *F.* ikke har opdaget, at 641 gaar op i $2^{32}+1$. Han har sikkert vidst, at dette Tal kun kunde have Primfaktorer af Formen $64n+1$; de første af disse ere 193, 257, 449, 577, 641, og Divisionen af disse Tal i 4294967297 er ikke saa uoverkommelig, at han af den Grund skulde lade være med at prøve dem. Maaske han har ment, at 257 var det eneste af de anførte Primtal der kunde være Tale om, og man ser jo strax, at 2^8+1 ikke kan være Faktor. Men $641 = 5 \cdot 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4$ er ogsaa af en særlig simpel Sammensætning, som tilsteder os øjeblikkelig at se, at 641 gaar op saavel i $2^{32}+1$ som i $5^{32}+1$. *Fermat* har altsaa ikke været opmærksom derpaa, og hvis han har udført Divisionen, saa har han regnet fejl.

Brevvexlingen med *Frénicle* blev ikke af lang Varighed, sidst nævnte interesserede sig øjensynlig mindre for *Fermats* nye Taltheori end for retvinklede Trekanter, som da ogsaa indtager en betydelig Plads i Brevene; det synes tilmed, at hans mathematiske Interesser ere vegne for theologiske, og *Fermat* fandt ikke nogen anden Korrespondent, som ret kunde følge ham paa dette specielle Omraade. Hvad der fremkommer fra *Fermats* Side i de følgende 15 Aar er da ej heller af fundamental Betydning, naar undtages den vigtige Sætning, at der altid kan findes uendelig mange Løsninger af Ligningen $ax^2+1=y^2$, naar a ikke er et Kvadrattal. Denne Sætning, der i 1657 blev stillet som Opgave særlig til de engelske Mathematikere, blev med stort Besvær løst af *Wallis*, og *Fermat* erkjendte Løsningens Rigtighed.

Det er særlig *Digby,* til hvem *Fermats* Breve fra denne Periode rettes, og et af disse Breve (af Juni 1658) er af ganske særlig Interesse. *Fermat* anfører først forskjellige Sætninger, han kan bevise, deriblandt den om Tallenes Dekomposition i Figurtal, endvidere $p = 4n + 1 = a^2 + b^2$, $p = 3n + 1 = a^2 + 3b^2$, $p = 8n + 1$ eller $8n + 3 = a^2 + 2b^2$. Men dernæst siger han, at han vil hellere forelægge nogle Sætninger, for hvilke han savner Beviser, selv om han er overbevist om deres Rigtighed. Disse ere, foruden

1°) den ovenfor omtalte angaaende $2^{2^n} + 1$, følgende:

2°) naar $p = 8n + 1$ er et Primtal, saa er $2p = a^2 + b^2 + c^2$.

3°) Produktet af to Primtal af Formen $4n + 3$, som ende paa 3 eller 7, vil være af Formen $a^2 + 5b^2$.

Denne Meddelelse har sin Betydning, fordi den angiver en Grænse for *Fermats* Viden.

Den sidste betydelige taltheoretiske Meddelelse er den saakaldte »Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres« i et Brev til *Carcavi* af Aug 1659, som første Gang er offentliggjort i vor Tid af *Ch. Henry.* Dette Brev indeholder en Beskrivelse af Principet i den Reduktionsmethode, som *Fermat* betegner under Navn af »la descente«. Fra først af anvendte han denne kun til at løse negative Sætninger, saasom: Intet Tal af Formen $3n - 1$ har Formen a^2+3b^2, $x^4 - y^4 = z^2$ er umulig i hele Tal. Men efterhaanden lærte han ogsaa at anvende den paa positive Sætninger som f. Ex. $p = 4n + 1 = a^2 + b^2$, idet han viste, at hvis et saadant Primtal ikke havde den forlangte Form, saa gjaldt det samme om et mindre. Ligeledes Sætningen $N = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ og Ligningen $y^2 = ax^2 + 1$. Endelig har han anvendt den paa andre »meget vanskelige Opgaver, ved hvilke Fremgangsmaaden er ganske forskellig fra de foregaaende Tilfælde«. Dertil hører følgende: z^3 kan ikke være lig $x^3 + y^3$; at $x^2 + 2 = y^3$ kun har Løsningen $x = 5$, $y = 3$; at $x^2 + 4 = y^3$ kun har to Løsninger: $x = 2$ og 11, og endelig, at $2^{2^n} + 1$ er et Primtal, hvilken sidste Opgave »est d'une très subtile et très ingénieuse recherche.«

Dernæst har *F.* fundet Regler til Løsning af Opgaver af en Form som f. Ex. $2Q + 7967 = x^2$, eller af dobbelte Ligninger som $2N + 3 = x^2$ og $3N + 5 = y^2$. Derimod erkjender han, at han ikke har en fuldkommen Regel til at afgjøre, om et Tal er et Primtal eller ikke, »men hvis *Frénicle* vil fortælle, hvad han ved derom, vilde det være en meget betydelig Hjælp for de Lærde«.

Heller ikke har han kunnet løse den Opgave at betemme, paa hvormange Maader et forelagt Tal kan være Polygontal.

Dette har *Fermat* kun skrevet, »fordi han indsaa, at han ikke fik Tid til at fremstille udførlig alle de paagjældende Methoder og Beviser, men han haaber, at Efterverdenen dog vil være ham taknemlig, fordi han har lært den, at de Gamle ikke har vidst alting!«

Der er endnu et enkelt Brev til *Billy* om dobbelte Ligninger, men iøvrigt er aabenbart den foregaaende Meddelelse at betragte som et Slags Testamente, Taltheorien vedrørende. Som saadant er det saare værdifuldt og meget oplysende med Hensyn til den Methode, som øjensynlig har været et af *Fermats* allervigtigste Hjælpemidler — maaske det eneste, han virkelig har besiddet ud over de Kunstgreb, hans Geni har lært ham at anvende i de enkelte specielle Tilfælde.

Men det er ligesaa mærkeligt ved de Ting, det ikke indeholder, hvoriblandt ikke blot »Fermats Theorem«, om hvilket vi have talt ovenfor, men ogsaa den almindelige Sætning, at $x^n + y^n = z^n$ er umulig. Den eneste rimelige Forklaring paa den sidstnævnte Udeladelse er den, at *Fermat* endnu paa dette Tidspunkt ikke havde denne Sætning bevist. Sætningen i den fuldstændige Form maa altsaa skrive sig fra hans sidste Levetid, fra Alderen over 58 Aar. Paa dette Tidspunkt har *Fermat* ikke haft synderlig Tid til sine mathematiske Spekulationer og har ej heller haft sin gamle Aandskraft at sætte ind paa Løsningen af vanskelige Opgaver.

Selv om jeg ikke fuldtud kan give *P. Tannery**) Ret, naar han mener, at alle *Fermats* store Opdagelser falde i Aarene mellem 1636 og 1640, saa er jeg dog aldeles enig med den nævnte Forfatter i, at netop disse Aar betegne Kulminationen af *Fermats* mathematiske Skaberevne.

At *Fermat* i en Alder af 60 Aar skulde have løst et Problem, paa hvilket jeg godt kan sige, at alle Mathematikere af nogen Betydning i de sidste 150 Aar have forsøgt deres Kræfter uden at finde en fuldstændig Løsning, er mig ganske utænkeligt. Langt rimeligere er det, at *Fermat* — som saa mange af hans Efterfølgere — har fundet en urigtig Løsning. Men Muligheden for, at han har Ret, naar han i sin Diofantnote paastaar, at han har bevist Sætningen, kan alligevel ikke helt afvises, og hvis han har haft en Løsning, da maa denne

---

*) Sur les dates des principales découvertes de Fermat. Darboux Bulletin 2 Sér. T. VII 1883.

have været saa simpel, at den vilde kunne forstaas af en Nutids Skoledreng. Thi *Fermats* tekniske Hjælpemidler vare saa primitive, at vor vel udviklede Teknik snarere er os en Hindring end en Hjælp, naar vi vil søge at reproducere *Fermats* Tankegang.

Derved er denne Sætning mere end noget andet Problem i den hele Mathematik bleven en Udfordring til Alverdens Mathematikere, baade unge og ældre, lærde og ulærde, og naar vi nu kaste et Blik tilbage paa den Udvikling af Videnskaben gennem Arbejder af Mænd som *Euler, Legendre, Gauss, Abel, Kummer* og *Lejeune Dirichlet,* hvortil den har givet Anledning, da fristes man til at ønske, at denne Opgaves Løsning fremdeles i en lang Række Aar maa friste Mathematikerne.

Men for Forstaaelsen af hele den Tankegang, der har været ledende for *Fermat* ved hans Opdagelser i Taltheorien, er det ikke Beviset for den sidste Sætning, som vilde have den største Interesse. Nøglen til en saadan Forstaaelse vilde derimod sikkert findes, hvis man var i Stand til at rekonstruere *Fermats* eget Bevis for Sætningen om et Tals Fremstilling som en Sum af Figurtal.

Δεύτεραι φροντίδες.

Skjønt en Saul mellem de mathematiske Propheter, vilde jeg gjerne have Lov til at give et lille Bidrag til dette Festskrift som et beskedent Tegn paa Taknemlighed for megen god Belæring og Hjælp. I en ganske særlig Grad har Prof. *Zeuthens* Bistand været mig uundværlig ved Reconstructionen af det i 1907 udgivne ny Skrift af Archimedes, og til dette skal her meddeles nogle ny Bemærkninger og Supplementer, som er Udbyttet af en sidste Sommer foretagen Revision af Haandskriftet i Constantinopel. Da det var de mest ulæselige Blade, jeg havde gjemt, kunde Udbyttet ikke blive særligt stort, men et og andet vigtigt Spørgsmaal er dog blevet løst.

Jeg citerer den græske Text efter min Udgave i Hermes 1907 og tilføjer en Oversættelse af de nyvundne Supplementer.

S 244, 16 skal der ikke staa εἰρημένων (omtalte), men εὑρημένων (fundne). Derefter er altsaa Sætningerne om Konoider og Sphæroider fundne (og sendt til Alexandria) før de to Sætninger om Prismet og Cylindrene i Tærningen, som nu sendes Eratosthenes.

S. 245, 2—3 synes der at staa, hvad jeg gjerne vilde, men ikke kunde, læse paa Photographiet: καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν (saaledes Reinach) κατὰ τὸ ὑποπίπτον. Archimedes siger altsaa om Eratosthenes, at han »ved given Lejlighed har udtalt sin Anerkjendelse af mathematiske Undersøgelser«.

Side 245, 22 staar der ikke ἐφευρεῖν men ζητεῖν. Dette giver en Mulighed for, idetmindste efter Meningen, at supplere de Bogstaver, der mangler i Lin. 23; der maa have staaet et Adverbium til ζητεῖν, og det maa have betydet saadan noget som: uden Vejledning, paa det uvisse.

Side 246, 4—6 synes at kunne udfyldes saaledes: τὴν εὕρεσιν ὁμοίαν (eller ὁμοίως) ταῖς πρότερον γεγενῆσθαι. ἠβουλήθην δὲ τὸν τρόπον ἀναγράψας ἐξενεγκεῖν. Archimedes har altsaa »fundet den ny Sætning*) paa samme Maade som de tidligere« og tilføjer: »og jeg har faaet Lyst til at nedskrive og udgive min Methode« osv.

S. 256, 21 staar der: τοῦ τοῦ . . θεῶρήματος. De forkerte Accenter viser, at der er en Fejl i Stedet; der skal vistnok staa: τούτου τεθεωρημένου (efter at dette var indset). ὅτι Lin. 26 er sikkert. Altsaa har Archimedes, som i Udgaven formodet, først fundet Kuglens Volumen, dernæst dens Overflade. Af Stedets Ordlyd følger ikke umiddelbart, som jeg tidligere antog, at det ny Skrift er ældre end Værket om Kuglen og Cylindren; men dette synes mig alligevel fremdeles at staa fast, fordi Archimedes kun ved Parabelquadraturen bemærker, at Beviset for den er udgivet tidligere, medens de øvrige Sætninger fremtræder som ny.

S. 281, 12 skal der staa σφαιροειδέος istedenfor σφαίρας. Der er altsaa Tale om et Sphæroidsegment, og saaledes bortfalder den S. 275 Anm. omtalte Vanskelighed; Sætning VIII har omhandlet Tyngdepunctet i et Kuglesegment.

Side 281, 26 ff. er der sikre Spor af, at der, som jeg formodede, har været anført Sætningen om et Hyperboloidsegments Volumen og om dets Tyngdepunct. Efter de forhaandenværende Bogstavrester maa Texten have lydt saaledes**):

---

*) At der her staar Enkelttal, tyder paa, at Archimedes har været klar over Sammenhængen mellem de to ny Sætninger, han sender Eratosthenes.

**) | betegner Linieslutning i Haandskriftet. En Prik under Bogstaverne betegner dem som usikre; er de tillige i ⟨ ⟩, er de helt borte. ⟨ ⟩ betegner Bogstaver tilføjede af mig.

θεωρεῖται δὲ διὰ τοῦ τρόπου | ⟨καί, ὅτι πᾶν τμῆμα ἀμβλυγωνίου κωνοειδέος⟩ πρὸς τὸν κῶνον τὸν βάσιν ἔχον|τα τὴν αὐτὴν τῷ τμήματι καὶ | ἄξονα τὸν αὐτὸν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, | ὃν ἔχει συναμφότερος ὅ τε ἄξων | τοῦ τμήματος καὶ ἡ τριπλασία | τῆς προσούσης τῷ ἄξονι πρὸς συ|ναμφότερον τόν τε ἄξονα τοῦ τμή|ματος τοῦ κωνοειδοῦς καὶ τὴν δι|πλασίαν τῆς προσούσης τῷ ἀξο|νι, κέντρον δὲ τοῦ βάρους τοῦ ἀμβλυ|γωνίου κωνοειδέος τμηθέντος | τοῦ ἄξονος, ὥστε τὸ πρὸς τῇ | κορυφῇ τμῆμα πρὸς τὸ[ν] λοιπὸν λό|γον ἔχει⟨ν⟩, ὃν ἔχει ὅ τε τριπλάσιος | τοῦ ἄξονος ⟨καὶ ἡ ὀκταπλασία⟩ | τῆς προ⟨σ⟩κειμένης πρὸς τὸν ἄξονα | αὐτοῦ τοῦ κωνοειδέος καὶ τὴν τετρα|πλασίαν αὐτῆς τῆς προ⟨σ⟩κειμένης | πρὸς αὐτόν, καὶ ἄλλα ἔτι πλείονα, ἃ | νῦν ἀφέντες osv.

Ved min Methode indses fremdeles, at et Hyperboloidsegment forholder sig til Keglen med samme Basis og samme Axe som Summen af Segmentets Axe og det tredobbelte af det til Axen føjede Stykke til Summen af Hyperboloidsegmentets Axe og det dobbelte af det til Axen føjede Stykke, og at et Hyperboloidsegments Tyngdepunct deler Axen saaledes, at Stykket ved Toppunctet forholder sig til Resten, som Summen af det tredobbelte af Axen og det 8dobbelte af det til Axen føjede Stykke forholder sig til Summen af selve Hyperboloidets Axe og det firdobbelte af det til den føjede Stykke, og endnu mange andre Ting, som vi i Øjeblikket vil lade ligge.

S. 293, 10 staar der dog ἐκδεδομένοις, ikke ἐκτεθειμένοις, hvilket ogsaa giver bedre Mening.

Florenz 3/XII 1908.

J. L. Heiberg.

Om Rum af uendelig mange Dimensioner.

Af J. Hjelmslev.

Ved *Zeuthen's**) og *Lüroth's* Fuldstændiggørelse af *v. Staudt's* Bevis for Fundamentalsætningen i den projektive Geometri viste det sig nødvendigt til de øvrige simple grafiske Forudsætninger, hvorpaa v. Staudt's Lærebygning hviler, at føje et meget væsentligt Postulat om den rette Linies Kontinuitet. Da senere Forsøg paa at undgaa dette Postulat viste sig frugtesløse, begyndte man at drage Kongruensforudsætninger med ind i Betragtningerne; derved har man i den aller nyeste Tid ganske vist opnaaet at kunne undgaa Kontinuitetsforudsætningen; men samtidig har man jo altsaa forladt det rent projektive Standpunkt.

Saaledes har man i dette Øjeblik ved Siden af den grafiske Begrundelse af Projektivgeometrien tillige en metrisk Begrundelse. Efter de Resultater, man foreløbig har naaet, maa det indrømmes, at den første i Henseende til Rækkevidde staar tilbage for den sidste. Men der kan næppe være Tvivl om, at den grafiske Begrundelse, for Rumgeometriens Vedkommende, kan og vil genvinde den Førerstilling, som tilkommer den. For Plangeometriens Vedkommende undgaar man derimod næppe Kongruensforudsætningerne.

I det følgende skal vi nu vise, hvorledes begge Systemer lader sig udvide til ogsaa at omfatte Rum af uendelig mange Dimensioner.

Forestillingen om saadanne Rum er gennem *Hilbert's* Undersøgelser over kvadratiske Former af uendelig mange variable og over Udviklinger af reelle Funktioner efter opgivne Funktioner trængt stærkt frem i Forgrunden, uden at man dog synes at have forsøgt en systematisk Behandling af de nævnte Rums Geometri.

---

*) Mathematische Annalen, Bd. 7, S. 535.

Særtryk af Nyt Tidsskrift
f. Mat. B. XX. Nr. 1.

Note.

I mit Bidrag til »Festskrift for Zeuthen« har jeg formuleret Poncelet's Sætning om ind- og omskrevne Polygoner som Lukningssætning, uden at fremhæve en herved nødvendig Betingelse, hvad Prof. Zeuthen straks har gjort mig opmærksom paa. Hvad Rettelsen skal gaa ud paa, følger umiddelbart af det Infinitesimalbevis for Poncelets Sætning, som jeg tidligere har fremsat her i Tidsskriftet 1890, Side 13 (selv om Sætningen heller ikke der er rigtig formuleret). Sætningen skal lyde saaledes: Naar α, $\beta_1 \ldots \beta_n$ er Keglesnit i et Bundt, og naar der findes én i α indskreven n-kant, hvis Sider berører $\beta_1 \ldots \beta_n$ i Punkter, der deler Siderne i Forhold, hvis Produkt er positivt eller negativt eftersom n er lige eller ulige, saa vil der findes en kontinuent Række af saadanne n-kanter. Produktets numeriske Værdi er forøvrigt, som vist det omtalte Sted, altid lig 1. Det er om denne Sætning, jeg har bemærket, at det ikke lader til, at den direkte kan bevises ved den af Hurwits fremsatte antalteoretiske Metode. Derimod kan et saadant føres efter Udførelse af en Transformation, der ikke er én—éntydig; som en saadan kan benyttes den, jeg i Festskriftet har anvendt til et rent projektiv-geometrisk Bevis for Sætningen.

C. Juel.

I det følgende skal vi for det første paa metrisk Grundlag opstille en Definition af Rummet; dernæst fører vi Bevis for dets Eksistens, saavel for en aftællelig som for en ikke aftællelig Mængde af Dimensioner. Endelig bringer vi ogsaa nogle indledende Betragtninger over den projektive Geometri.

§ 1. **Rummets Definition.**

Et Rum er en Samling af Elementer (Punkter), for hvilken de i det følgende nævnte Love er gældende.

1. Der gives visse Punktsamlinger, som kaldes rette Linier; 2 vilkaarlige Punkter bestemmer én og kun én ret Linie, hvortil de selv hører. Der gives Punkter, der ikke hører til samme rette Linie.

Et System af 2 forskellige Punkter, A og B, kaldes en Afstand (AB eller BA). 2 Afstande siges under visse Betingelser at være kongruente eller lige store; disse Betingelser skal være saaledes beskafne, at de medfører de følgende Egenskaber.

2. Naar to Afstande er lige store med samme tredje, er de indbyrdes lige store.

3. Har man opgivet en vilkaarlig ret Linie og et vilkaarligt Punkt A paa denne, da eksisterer der 2 og kun 2 Punkter B paa Linien saaledes, at Afstanden AB er kongruent med en given Afstand.

4. Enhver Afstand AB har ét og kun ét Midtpunkt M. Det vil sige, at der paa Linien AB findes ét og kun ét Punkt M saaledes, at AM og BM er lige store

5. Til enhver ret Linie a hører en Spejling med a som Akse.

Ved en Spejling forstaas her en saadan Punkttransformation, at der til hvert Punkt A udenfor a svarer et fra A forskelligt Punkt A_1, Spejlbilledet af A med Hensyn til a, saaledes at A ogsaa er Spejlbillede af A_1; ethvert Punkt paa a skal ved Transformationen svare til sig selv; enhver Afstand skal svare til en lige saa stor Afstand, og enhver ret Linie skal svare til en ret Linie.

Enhver Linie, der forbinder et Punkt udenfor a med dets Spejlbillede, siges at være vinkelret paa a.

Et System af 3 Punkter, A, B og C, der ikke ligger paa samme rette Linie, siges at danne en Trekant ABC. Er AB og AC lige store, kaldes Trekanten ligebenet.

6. Der gives en Spejling, som fører en vilkaarlig ligebenet Trekant over i Trekanten selv, saaledes at de to indbyrdes lige store Sider ved Spejlingen bliver ombyttede.

7. Midtpunkterne af en Trekants Sider kan ikke ligge paa samme rette Linie.

Hermed er vor Definition af Rummet afsluttet, saaledes at vi kan klassificere de forskellige Muligheder, der viser sig ved nærmere Udviklinger paa Grundlag af de i Definitionen nævnte Egenskaber.

Her skal vi dog kun ganske kort antyde, hvorledes Klassificeringen med Hensyn til det saakaldte Dimensiontal naturligt frembyder sig og fuldføres.

Ved Hjælp af Forudsætn. 5 kan man (som vist i min Afhandling om Kongruens og Symmetri)*) indse, at der gennem et Punkt af en Linie kan drages mindst én vinkelret paa Linien; dersom der kun er én, kaldes Rummet en Plan.

Hvorledes Planens Geometri derefter lader sig udvikle paa det opgivne Grundlag fremgaar af et tidligere Arbejde**).

I Planen kan der gennem et Punkt drages 2 paa hinanden vinkelrette Linier, men ikke nogen tredje Linje, vinkelret paa disse. Planen siges da at have 2 Dimensioner.

Dersom et Rum har den Egenskab, at der gennem et Punkt kan drages p Linier, der parvis er vinkelrette paa hinanden, medens der ikke gives nogen Linie, der er vinkelret paa dem alle, siges Rummet at have p Dimensioner; det betegnes med R_p. Bliver Antallet p uendelig stort, betegnes Rummet med R_∞, og siges da at have uendelig mange Dimensioner. Dimensiontallet kan være aftælleligt eller ikke.

Et plant Liniebundt bestemt ved 2 hinanden skærende Linier a og b defineres som Samlingen af alle de Linier gennem Skæringspunktet, som er vinkelrette paa enhver Linie, der er vinkelret baade paa a og b. Det lader sig da bevise, at et saadant Liniebundt er bestemt ved 2 vilkaarlige af sine Linier, og at det geometriske Sted for de Punkter, der ligger paa Bundtets Linier, er en Plan. Heraf udleder man, at der gennem 3 vilkaarlige Punkter af Rummet kan lægges én og kun én Plan (naar Punkterne ikke ligger paa en ret Linie). Derefter er det let at vise, at R_∞ indeholder Rum af et hvilket som helst endeligt Dimensiontal, ligesom hele den sædvanlige Kongruenslære i disse Rum lader sig udlede.

---

*) Nyt Tidsskrift f. Matematik, B, 1907, S. 5.

**) Mathematische Annalen, 64. Bd. S. 449.

§ 2. **Eksistensbeviset.**

Ved en Funktionaloperation i en forelagt Mængde ***M*** forstaar vi en saadan Operation, hvorved der til ethvert Element i Mængden bestemmes et tilsvarende Tal, som vi her vil forudsætte reelt*). Idet vi lader ***M*** være en ganske vilkaarlig Mængde af uendelig mange Elementer, betragter vi saadanne Funktionaloperationcr i ***M***, hvor der blandt de Tal, der svarer til Mængdens Elementer, kun findes et endeligt Antal, der er forskellige fra Nul; dersom en saadan Funktionaloperation U lader Elementerne $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \varkappa$ (af Mængden ***M***) svare til Tallene:

$$U(\alpha) = a, \ U(\beta) = b, \ldots . U(\varkappa) = k,$$

der alle er forskellige fra Nul, medens ethvert andet Element i ***M*** svarer til Tallet Nul, betegner vi Operationen ved

$$U = \begin{Bmatrix} a, & b, & c, & \ldots . k \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots . \varkappa \end{Bmatrix},$$

idet vi dog ogsaa ofte tillader os i nederste Række at tilføje et vilkaarligt Antal af de øvrige Elementer, medens vi i øverste Række oven over disse skriver Tallet 0.

Den Operation, der lader alle Elementer i ***M*** svare til 0, betegner vi med O.

Ved Summen af 2 Operationer U og V forstaar vi en saadan Operation W, at for hvert Element α i ***M***:

$$U(\alpha) + V(\alpha) = W(\alpha),$$

Er n et vilkaarligt reelt Tal, sætter vi $V = n \cdot U$, naar $V(\alpha) = n \cdot U(\alpha)$, for hvert Element α.

Vi vil nu bevise, at Samlingen af alle de Funktionaloperationer, som vi her har defineret, danner et Rum, hvis Dimensiontal har samme Mægtighed som den forelagte Mængde ***M***.

Idet vi bruger Ordet »Punkt« i Stedet for »Funktionaloperation«, fastsætter vi følgende Definitioner:

Afstanden mellem 2 Punkter U og V er et positivt Tal, der betegnes med $|UV|$ og defineres ved:

$$|UV|^2 = \Sigma (U(\alpha) - V(\alpha))^2,$$

*) Den systematiske Behandling af saadanne Funktionaloperationers Theori er paabegyndt af *M. Fréchet* (Sur quelques points du calcul fonctionnel, Paris 1906).

hvor Summationen udstrækkes til alle Elementer α i Mængden, for hvilke mindst en af Værdierne $U(\alpha)$ og $V(\alpha)$ er forskellige fra Nul; Summen Σ indeholder da kun et endeligt Antal Led.

Ved den rette Linie, der forbinder Punkterne U og V, forstaas Samlingen af Punkterne $aU + (1-a)V$, idet a gennemløber alle reelle Værdier.

Midtpunktet af Afstanden UV er $\frac{1}{2}(U+V)$.

Ved en Plan gennem 3 Punkter U, V og W, der ikke ligger paa samme rette Linie, forstaas Samlingen af de Punkter, der fremstilles ved Udtrykket $aU + bV + cW$, hvor $a + b + c = 1$.

Paa lignende Maade defineres højere Rum.

Ved Parallelforskydningen OU, hvor O er Nuloperationen og U en vilkaarlig given Operation, forstaas en Punkttransformation, som bestaar i, at man til hvert Punkt V lader svare $V+U$. Ved en Parallelforskydning vil altsaa ret Linie svare til ret Linie og Afstand til lige saa stor Afstand. Tilsvarende Linier kaldes parallele.

Er U, V, X og Y fire vilkaarlige Punkter, og sættes

$$U - V = \left\{\begin{matrix} a, & b, & c, & \ldots & k \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots & \varkappa \end{matrix}\right\},$$

$$X - Y = \left\{\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, & \ldots & k_1 \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots & \varkappa \end{matrix}\right\},$$

siges Linierne UV og XY at staa vinkelret paa hinanden, saafremt:

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 + \ldots kk_1 = 0. \tag{I}$$

Spejlbilledet A_1 af et Punkt A med Hensyn til en Linie XY defineres derefter ved, at AA_1 skal være vinkelret paa XY og have sit Midtpunkt liggende paa denne.

Efter disse Definitioner vil vi være i Stand til at vise, at alle de i 1—7 (§ 1) indeholdte Sætninger er tilfredsstillede. Dette vil kræve ganske lidt Regning; ved virkelig at udføre denne Regning vilde vort Bevis ogsaa omfatte Eksistensen af Rum med et endeligt Antal Dimensioner, idet man specielt kunde lade $\boldsymbol{M}$ være en endelig Mængde. Men forudsætter vi Læren om Rum med et endeligt Antal Dimensioner bekendt, kan vi nøjes med én eneste Bemærkning.

Hver af Sætningerne 1—7 kan bevises ved at undersøge et endeligt Antal Punkter og deres Forbindelseslinier. Alle disse Punkter kan fremstilles ved Symboler af Formen

$$\left\{\begin{matrix} a_i, & b_i, & c_i, & \ldots & k_i \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \ldots & \varkappa \end{matrix}\right\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots n,$$

hvor nogle af Tallene i øverste Række specielt kan være Nul. Det indgaaende Antal Elementer ($\alpha, \beta, \ldots . \varkappa$) er r.

Man kan nu betragte et Euklidisk Rum af r Dimensioner og i dette udtage n Punkter med de retvinklede Koordinater

$$(a_i, b_i, c_i, \ldots . k_i).$$

Vore Definitioner ovenfor af ret Linie, Afstand o. s. v. vil nu for disse n Punkters Vedkommende være i nøjagtig Overensstemmelse med den for det nævnte Rum af r Dimensioner gældende Geometri. Sætningerne 1—7 vil derfor alle være rigtige.

Tilbage staar at vise, at der gennem et Punkt af vort Rum af Operationer, f. Eks. gennem O, eksisterer et System af uendelig mange parvis paa hinanden vinkelrette Linier, hvis Antal har den ved Mængden ***M*** bestemte Mægtighed; men denne Betingelse opfyldes af de Linier, der forbinder O med alle Punkter, der udtrykkes ved Symboler af Formen $\left\{ \begin{matrix} 1 \\ \alpha \end{matrix} \right\}$, hvor α er et vilkaarligt Element i ***M***. Til hvert Element i ***M*** svarer altsaa nøjagtigt én af disse Linier, og omvendt.

Tillige ses det (ved Hjælp af (I)), at der ikke gives nogen Linie, der er vinkelret paa enhver af de nævnte Linier.

Sætningen er altsaa fuldstændig bevist, og det er saaledes fastslaaet, at der eksisterer Rum, i hvilke den Euklidiske Metrik gælder, og i hvilke Dimensiontallet har en vilkaarlig given Mægtighed.

Lader man specielt ***M*** være Samlingen af alle reelle Tal mellem 0 og 1, bliver Rummets Dimensiontal af Kontinuets Mægtighed.

At der eksisterer ikke-Euklidiske Rum af uendelig mange Dimensioner, bevises derefter let ved en Fremgangsmaade analog med den sædvanlige for Rum af et endeligt Antal Dimensioner.

§ 3. **Den projektive Geometri.**

Det projektive Rum defineres som en Samling af Punkter, der tilfredsstiller de sædvanlige grafiske Forudsætninger om Linier og Planer*), dog med Undtagelse af den Sætning, at 2 Planer, der har et Punkt fælles, har mindst endnu et Punkt fælles. Tillige forudsættes

*) Hvorledes man herved kan definere ideale Punkter (hvis det er nødvendigt), saaledes at man derefter kan gaa ud fra, at 2 Linier i samme Plan altid har et Punkt fælles, forudsættes bekendt.

det, at det fuldstændige Kontinuitetsprincip, saaledes som f. Eks. *Dedekind* har formuleret det, er gyldigt.

Spørgsmaalet er nu, om man ud fra dette almindelige Standpunkt er i Stand til at udvikle en Lære om Rummets Kollineationer (d. v. s. éntydige Transformationer, hvor Punkt svarer til Punkt, og ret Linie til ret Linie).

Vi betragter et vilkaarligt Punktsystem Σ, der indeholder mindst 2 Punkter. Hvert Punktpar i Systemet forbindes med en ret Linie. Samlingen af alle Punkter, der indeholdes i disse Linier, betegnes med Σ_1. Σ_1, der siges at være den lineære Udvidelse af Σ, er enten identisk med Σ, eller ogsaa vil den foruden Σ omfatte nye Punkter. Paa lignende Maade kan man danne en lineær Udvidelse Σ_2 af Σ_1, o. s. v. Alle de Punkter, som kan naas ved et endeligt Antal saadanne Udvidelser, siges at være lineært afhængige af Σ, medens de Punkter, som ikke for nogen endelig Værdi af n vil være indeholdte i Σ_n, siges at være lineært uafhængige af Σ. Eksempel: Σ bestaar af 3 Punkter A, B og C, der ikke ligger paa samme rette Linie; Σ_1 omfatter da alle Punkter, der ligger paa de 3 Punkters Forbindelseslinier, og Σ_2 omfatter alle Punkter i Planen ABC; Σ_3, Σ_4 o. s. v. er identiske med Σ_2. De Punkter, der er lineært afhængige af A, B og C, er altsaa de i Planen ABC indeholdte Punkter, medens ethvert Punkt uden for denne Plan er lineært uafhængigt af A, B og C.

Et System af Punkter siges at være lineært uafhængige af hverandre, naar ethvert af dem er lineært uafhængigt af de øvrige. Eksempler: 3 Punkter, der ikke ligger paa samme rette Linie; 4 Punkter, der ikke ligger i samme Plan.

Dersom et Rum indeholder et endeligt Antal $(n + 1)$ Punkter $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{n+1}$, der er lineært uafhængige af hverandre, saaledes at ethvert andet Punkt er lineært afhængigt af de nævnte Punkter, siges Rummet at have n Dimensioner og betegnes med R_n. Punktsystemet $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ kaldes et Fundamentalsystem for Rummet.

Dersom et Rum indeholder et System af uendelig mange Punkter $A_1, A_2, \ldots$, der er lineært uafhængige af hverandre, saaledes at ethvert andet Punkt i Rummet er lineært afhængigt af det nævnte System, siges Rummet at have uendelig mange Dimensioner og betegnes med R_∞. Punkterne $A_1, A_2 \ldots$ siges at danne et Fundamentalsystem for Rummet.

Samtidig med, at vi opstiller disse Definitioner, vil vi imidlertid straks bemærke, at man ikke paa Forhaand har nogen Sikkerhed for, at den herved angivne Klassificering af de projektive Rum er udtømmende. Det kunde jo være, at der eksisterer projektive Rum, der ikke indeholder noget Fundamentalsystem af den angivne Art; vi gaar imidlertid foreløbig ud fra, at saadanne Rum ikke eksisterer; vi skal senere komme tilbage til Beviset herfor.

Vi gaar altsaa ud fra, at det Rum, vi betragter, indeholder et Fundamentalsystem; tillige vil vi kun betragte Rum af uendelig mange Dimensioner, idet vi forudsætter bekendt, hvorledes den projektive Geometri for Rum af et endeligt Antal Dimensioner lader sig udvikle ud fra det Grundlag, vi nu har givet.

Vi antager altsaa, at R_∞ indeholder et Fundamentalsystem F. Samtlige Punkter, der er lineært afhængige af F, udgør altsaa hele Rummet

Ethvert Punkt P, der ikke hører til F, vil være lineært afhængigt af et endeligt Antal Punkter i F. Dersom P nemlig findes i den n'te lineære Udvidelse F_n af F, men ikke i F_{n-1}, da maa P ligge paa en ret Linie, som forbinder 2 Punkter af F_{n-1}; disse to Punkter kan atter dannes ved lineær Udvidelse af højst 4 Punkter i F_{n-2} o. s. v. P kan altsaa dannes ved fortsat lineær Udvidelse af højst 2^n Punkter af F.

Antager vi nu, at det mindst mulige Antal Punkter i F, hvoraf P kan dannes ved et passende Antal efter hinanden følgende lineære Udvidelser, er r, da vil P være lineært afhængigt af ét og kun ét System af r Punkter i F. Var det nemlig afhængigt af 2 forskellige Systemer, der tilsammen indeholder s forskellige Punkter ($r + 1 \leq s \leq 2r$), da maatte disse s Punkter være lineært afhængige af hinanden, hvilket strider mod Forudsætningen.

Det omtalte ved P éntydigt bestemte System af r Punkter kaldes de til P hørende Fundamentalpunkter. De bestemmer et Rum af $r - 1$ Dimensioner, hvori P ligger.

Alle Punkter, der er lineært afhængige af den Punktmængde, der bliver tilbage, naar man af Fundamentalsystemet F borttager et Punkt X_1, siges at danne en Hyperplan Π.

Enhver ret Linie a, der ikke ligger i Hyperplanen Π, skærer den i ét Punkt.

Bevis: Paa a vælges 2 Punkter A og B, der ikke ligger i Π; de til A og B hørende Fundamentalpunkter kan ikke alle ligge i Π. Et af dem maa da være X_1; de øvrige betegnes med X_2, X_3 .... X_r.

Punkterne X_1, X_2, ... X_r bestemmer et Rum R_{r-1}, der skærer Π i et Rum R_{r-2}, bestemt ved Punkterne X_2, X_3 .... X_r. Da a nu ligger i R_{r-1}, og R_{r-2} ligesaa, maa a skære R_{r-2} i et Punkt; altsaa skærer den Π i det samme Punkt.

Det bevises nu let, at et Rum af p Dimensioner skærer Π i et Rum af $p - 1$ Dimensioner.

Enhver fuldstændig Kollineation (d. v. s. en saadan Kollineation, hvor hele Rummet svarer til hele Rummet) maa føre et Fundamentalsystem over i et andet Fundamentalsystem.

En Kollineation er éntydig bestemt ved, at et givet Fundamentalsystem F paa vilkaarlig opgiven Maade føres en-entydigt over i et andet givet Fundamentalsystem F', med Tilføjelse af, at en given Hyperplan Π, der ikke indeholder noget Punkt af F, føres over i en anden given Hyperplan Π', der ikke indeholder noget Punkt af F'.

Bevis: Vi vælger et vilkaarligt Punkt P og vil paavise, at det faar et bestemt tilsvarende Punkt P' ved den nævnte Transformation. Lad de til P hørende Fundamentalpunkter i F være X_1, X_2, ... X_r; de til disse svarende Punkter i F' er X'_1, X'_2, ... X'_r. X_1, X_2 .... X_r bestemmer et Rum R_{r-1}, medens X'_1, X'_2 .... X'_r bestemmer et Rum R'_{r-1}. Disse 2 Rum skærer Hyperplanerne Π og Π' i 2 Rum, henholdsvis R_{r-2} og R'_{r-2}. Den Kollineation, vi skal bestemme, maa føre R_{r-1} over i R'_{r-1}, saaledes at X_1, X_2, ... X_r og R_{r-2} føres over i henholdsvis X'_1, X'_2 .... X'_r og R'_{r-2}. Men herved er Forbindelsen mellem R_{r-1} og R'_{r-1} entydigt bestemt. Til Punktet P i R_{r-1} svarer derfor et ganske bestemt Punkt F' i R'_{r-1}, hvilket skulde bevises.

Vi er nu naaet saa vidt, at de første Vanskeligheder kan siges at være overvundne: Læren om Kollineationer, Polariteter (hvor Punkt svarer til Hyperplan), om Hyperflader af 2. Orden (ɔ: en saadan Punktmængde, som skæres af enhver Plan i et Keglesnit), er tilgængelig.

I Rum med uendelig mange Dimensioner faar de ufuldstændige Kollineationer en særlig Interesse. Da Fundamentalsystemet indeholder uendelig mange Punkter, kan det nemlig afbildes én-éntydigt paa en Del af sig selv; derved kan man altsaa komme til Kollineationer, der afbilder hele Rummet én-éntydigt paa en Del deraf (f. Eks. paa en Hyperplan). Saadanne ufuldstændige Kollineationer spiller en stor Rolle ved mange nyere Undersøgelser over reelle Funktioner.

Samlingen af alle reelle kontinuerte Funktioner af en eel variabel x, definerede for et vist Interval ($a \leq x \leq b$) kan opfattes som et projektivt Rum, idet hver Funktion opfattes som et Punkt, og Samlingen af Funktionerne $\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\psi(x)$, hvor λ gennemløber alle reelle Talværdier, opfattes som en ret Linie. Er $K(x, y)$ en given reel kontinuert Funktion af 2 variable, defineret for det nævnte Interval i x og y, bestemmer Ligningen

$$(1) \qquad \varphi_1(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\,dy,$$

til hver Funktion $\varphi(x)$ en tilsvarende Funktion $\varphi_1(x)$. Den herved bestemte Transformation er en Kollineation.

Er φ_1 given, kan der blive Tale om at finde φ; men denne Opgave er ikke altid mulig. Her har vi altsaa et Eksempel paa en ufuldstændig Kollineation. Lign. (1) kaldes af *Hilbert* en Integralligning af 1. Art. Saa vidt jeg véd, er den endnu ikke løst i sin almindelige Form. Ligningen

$$(2) \qquad f_1(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, y) f(y)\,dy,$$

hvor $K(x, y)$ og $\varphi(x)$ er givne Funktioner, definerer ligeledes en Kollineation, som fører fra Funktionen $f(x)$ til $f_1(x)$.

At løse Ligningen (Integralligningen af 2. Art)

$$(3) \qquad f(x) = \varphi(x) + \int_a^b K(x, y) f(y)\,dy$$

med Hensyn til $f(x)$ er ensbetydende med at søge et Fællespunkt i den nævnte Kollineation. Denne Opgave er først løst af *Fredholm.*

I øvrigt fremgaar det af de talrige Undersøgelser, som er fremkomne i Forbindelse med Integralligningernes Theori, at de reelle Funktioners Rum lader sig opfatte som et Euklidisk Rum af en aftællelig Mængde Dimensioner, idet man definerer Afstanden r mellem 2 Punkter $\varphi(x)$ og $\psi(x)$ ved Udtrykket

$$r^2 = \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))^2\,dx,$$

og en stor Mængde af de Resultater, som man paa dette Omraade er

naaet til ad analytisk Vej, lader sig forklare paa en meget naturlig og overskuelig Maade ved geometriske Betragtninger*).

Idet vi vender tilbage til det almindelige projektive Rum R_∞, vil vi vise, hvorledes vi ogsaa der kan indføre en Metrik. Vi vælger et bestemt Fundamentalsystem $\boldsymbol{F}$ og en Hyperplan Π, som ikke har noget Punkt fælles med $\boldsymbol{F}$. Et Punkt O i $\boldsymbol{F}$ vælges som Begyndelsespunkt, og dets Forbindelseslinier med alle de andre Punkter P_1, P_2 .... i $\boldsymbol{F}$ benyttes som Koordinatakser. Paa hver af disse Linier vælges O som Nulpunkt, P_1 henholdsvis P_2 .... som Enhedspunkt og Liniens Skæringspunkt med Π som Uendelighedspunkt, idet ethvert Punkt paa Linien bestemmes ved det Dobbeltforhold det danner med de 3 nævnte Punkter. Paa hver af Koordinatakserne bestemmes ethvert Punkt saaledes ved en bestemt Koordinat (det nævnte Dobbeltforhold). Til et vilkaarligt Punkt S i Rummet hører nu en bestemt endelig Samling af Fundamentalpunkter P_1, P_2, ... P_n. Disse bestemmer sammen med O et Rum af n Dimensioner, hvori S ligger. I dette Rum bestemmes S paa sædvanlig Maade ved n Dobbeltforhold paa Koordinatakserne OP_1, OP_2 .... OP_n. Efter dette bliver altsaa ethvert Punkt i Rummet bestemt ved et endeligt Antal Koordinater, og vi faar altsaa en Metrik ganske som den vi betragtede i § 2.

Til Slutning skal vi endnu vise, at *ethvert projektivt Rum*, saaledes som vi hidtil har forudsat, *har et Fundamentalsystem, at der altsaa ikke eksisterer andre Rum, end dem, der i § 2 er opstillede som Eksempler.* Dette Bevis er jeg dog kun i Stand til at føre paa Grundlag af den Sætning, at enhver Mængde lader sig velordne**). De følgende Betragtninger er analoge med dem, som *G. Hamel****) under den samme Forudsætning har benyttet til Paavisning af, at Funktionalligningen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ har diskontinuerte Løsninger.

Vi antager altsaa, at det forelagte Rums Punkter kan ordnes saaledes, at de danner en velordnet Samling Σ, altsaa at denne Samling og enhver deri indeholdt Punktmængde har et første Element. Vi udtager nu de to første Punkter A og B i Σ og benytter dem som de første Punkter i det Fundamentalsystem $\boldsymbol{F}$, vi vil danne. Af

*) Den Opgave at »orthogonalisere« et givet System af indbyrdes lineært uafhængige Funktioner er ensbetydende med, i et givet lineært Rum at finde et retvinklet Koordinatsystem. Denne Opgave er løst af *J. P. Gram* (Doktorafhandling 1879 og Crelles Journal, 94. Bd.).

**) Se *Zermelo's* Afhandl. i Math. Ann., 65. Bd., S. 107.

***) *G. Hamel*, Math. Ann., 60. Bd., S. 459.

Σ udskydes alle Punkter, der ligger paa Linien AB; af den tilbageblivende Mængde optager vi det første C i F o. s. v. Dersom vi paa denne Maade kun finder et endeligt Antal Punkter A, B og $C \dots$, danner disse Punkter det søgte Fundamentalsystem, og Rummet har da et endeligt Antal Dimensioner. I modsat Fald træffes følgende almindelige Aftaler angaaende et vilkaarligt Punkt X i Σ, om det skal høre til det søgte System F eller ikke: Saafremt X er lineært uafhængigt af ethvert endeligt Antal af de forud for X i Σ liggende Punkter, regner vi X med til F; i modsat Fald optager vi det ikke i F.

Den saaledes bestemte Punktsamling F vil nu virkelig danne et Fundamentalsystem for hele Rummet. Thi:

1) Ethvert Punkt X i F er lineært uafhængigt af et endeligt Antal af de øvrige Punkter i F. I modsat Fald var der nemlig et endeligt Antal Punkter X_1, $X_2 \dots X_n$, der var lineært afhængige af hinanden; men dette vilde stride mod den Forudsætning, hvorunder de valgte Punkter i F er udtagne.

2) Ethvert Punkt P uden for F maa være lineært afhængigt af et endeligt Antal Punkter i F. Fandtes der nemlig Punkter, der ikke hører med til F og ikke er lineært afhængige af et endeligt Antal Punkter i F, maatte denne Samling af Punkter have et første Punkt; men dette Punkt vilde ikke kunne være lineært afhængigt af et endeligt Antal af de foregaaende Punkter; ellers blev det jo ogsaa lineært afhængigt af et endeligt Antal Punkter i F.

Begge de stillede Betingelser er altsaa opfyldte, og efter dette eksisterer der da i ethvert projektivt Rum et Fundamentalsystem, altsaa ogsaa en Metrik. Dette fører til et meget overraskende Resultat, naar man anvender det paa det Rum, hvori hvert Punkt defineres ved en uendelig Række af reelle Koordinater $(a_1, a_2, a_3 \dots)$, der ikke er underkastet nogen som helst Konvergensbetingelse. I dette Rum eksisterer der som Følge af vore Betragtninger en Metrik, saaledes at Afstanden mellem 2 Punkter udtrykkes ved et reelt Tal, og saaledes at den Euklidiske Kongruenslære gælder.

Bidrag til Kædebrøkernes Teori.

Af J. L. W. V. Jensen.

---

1. Om Tæller og Nævner i Kædebrøkskonvergenter*).

I det følgende vil jeg give et nyt independent Udtryk for Tælleren og Nævneren i den n^{te} Konvergent af Kædebrøken

$$\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +}\,\frac{a_2}{b_2 +}\cdots\frac{a_m}{+\,b_m},$$

nemlig T_n og N_n i

$$\frac{T_n}{N_n} = \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n, \text{ hvor } n \leqq m.$$

Man har som bekendt

$$T_0 = b_0,\ T_1 = b_0 b_1 + a_1 = \left(b_0 + \frac{a_1}{b_1}\right) b_1,\ \ T_2 = b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_0 a_2,$$

o. s. v.

Det sidst nedskrevne Udtryk kan skrives paa følgende Maade:

$$T_2 = \left\{\left(b_0 + \frac{a_1}{b_1}\right)\left(b_1 + \frac{a_2}{b_2}\right) b_2\right\},$$

hvor Bølgelinierne $\{\}$ betegner, at man, efter at Produktet indenfor samme er udviklet i sine Addender:

$$b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_0 a_2 + \frac{a_1 a_2}{b_1},$$

---

*) Af et Foredrag, holdt i Matematisk Forening d. 16. Januar 1906.

bortkaster alle Addender, som ikke kan bringes paa hel algebraisk Form.

Ved det almindelige Induktionsbevis ser man uden Vanskelighed, at samme Sætning gælder almindeligt, nemlig

$$(1) \qquad T_n = \left\{ \left(b_0 + \frac{a_1}{b_1}\right)\left(b_1 + \frac{a_2}{b_2}\right) \cdots \left(b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}\right) b_n \right\}.$$

Denne nye Form for T_n er et nyt Udtryk for den vel bekendte Sætning, at T_n bestaar af en Sum af alle de Addender, der kan dannes af een af dem $b_0 b_1 b_2 \cdots b_n$, ved at man paa alle mulige Maader erstatter to b med paa hinanden følgende Indices b_ν, $b_{\nu-1}$ med tilsvarende a_ν, eller anderledes udtrykt, at T_n indeholder alle Addender af det udviklede Produkt imellem Bølgelinierne, hvori der ikke forekommer a_ν med paa hinanden følgende Indices.

Den sidste Bemærkning kan benyttes til at danne et nyt independent Udtryk for T_n.

Lad (α, β) betegne et bilineært Udtryk i α og β, nemlig

$$(\alpha, \beta) = A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D,$$

hvor A, B, C, D er uafhængige af α, β, da kan Leddet $A\alpha\beta$ let fjærnes ved følgende Proces. Man danner Summen $\sum_\lambda (\lambda\alpha, \lambda\beta)$, hvor λ gennemløber Værdirækken $\lambda = 1, \theta_1, \theta_2$, idet θ'erne er bestemte ved Ligningerne

$$1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 = 0, \quad 1 + \theta_1 + \theta_2 = 3,$$

eller

$$\left.\begin{matrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{matrix}\right\} = 1 \pm \frac{i}{2}\sqrt{6}.$$

Man finder saaledes

$$\Sigma\,(\lambda\alpha, \lambda\beta) = 3\,(B\alpha + C\beta + D).$$

Denne Bemærkning kan let anvendes paa Formel (1) til at fjærne alle Led i det udviklede Produkt imellem Bølgelinierne, som indeholder a_ν med paa hinanden følgende Indices, og man finder

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} 3^{n-1} T_n = \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}} \left(b_0 + \frac{\lambda_1 a_1}{b_1}\right)\left(b_1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2 a_2}{b_2}\right) \cdots \\ \cdots \left(b_{n-2} + \frac{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1} a_{n-1}}{b_{n-1}}\right)\left(b_{n-1} + \frac{\lambda_{n-1} a_n}{b_n}\right) b_n, \end{aligned} \right.$$

hvor λ'erne uafhængigt af hverandre gennemløber Rækken $1, \theta_1, \theta_2$.

Da man hidtil kun har kendt eet independent Udtryk for T_n, nemlig ved en Kontinuant eller Kædebrøksdeterminant, har jeg tænkt mig, at det nye Udtryk (2) vilde være af Interesse, til Trods for, at det var noget kompliceret.

Da som bekendt

$$N_n = [T_n]_{b_0 = 1,\, a_1 = 0},$$

finder man af (1) og (2) analoge Udtryk for N_n, som det imidlertid er overflødigt at nedskrive.

Forøvrigt er Formel (1) ikke uden Interesse. Dels er den meget let at erindre, dels viser den paa en simpel Maade bekendte Egenskaber ved Kædebrøker. Da man har

$$\left(b_0 + \frac{a_1}{b_1}\right) \cdots \left(b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}\right) b_n = \left(b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}}\right) \cdots \left(b_1 + \frac{a_1}{b_0}\right) b_0,$$

følger af (1) den bekendte Sætning, at T_n ogsaa er Tæller i den n^{te} Konvergent af Kædebrøken

$$\left[b_n;\ \frac{a_{n+1-\nu}}{b_{n-\nu}}\right]_1^n.$$

Endvidere ser man umiddelbart af (1) den bekendte Ulighed

$$|T_n| < \left(\left|b_0\right| + \left|\frac{a_1}{b_1}\right|\right) \cdots \left(\left|b_{n-1}\right| + \left|\frac{a_n}{b_n}\right|\right) \left|b_n\right|$$
$$= \left(1 + \left|\frac{a_1}{b_1 b_0}\right|\right) \cdots \left(1 + \left|\frac{a_n}{b_n b_{n-1}}\right|\right) \left|b_0 b_1 \cdots b_n\right|.$$

2. Om Konvergens af Kædebrøker med komplekse Led*).

For Konvergensen af Kædebrøker af Formen

(1) $$\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \frac{1}{b_1 +} \frac{1}{b_2 +} \frac{1}{b_3 +} \cdots,$$

hvor $b_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ er komplekse Tal, har *E. B. van Vleck***) fornylig angivet en Række nye og ligesaa vigtige som interessante Sætninger.

Disse Sætninger er følgende.

---

*) Foredrag, holdt i Mathematisk Forening d. 17. April 1906.

**) On the convergence of continued fractions with complex elements. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 2 (1901), p. 215—233.

Theorem 1. I en Kædebrøk af den angivne Form vil Konvergenterne af ulige Orden saa vel som Konvergenterne af lige Orden konvergere imod to endelige, indbyrdes forskellige Grænseværdier, naar $\Sigma|b_\nu|$ er konvergent og naar enten alle α_ν eller alle $(-1)^\nu\beta_\nu$ har samme Fortegn.

I en Note (loc. cit. p. 222) angives tillige, at et vilkaarligt Antal af Konstanterne α_ν og β_ν kan være Nul, hvilket ogsaa paastaas at gælde for de følgende Sætninger.

Theorem 2. Hverken Tæller eller Nævner i nogen Konvergent af Kædebrøken kan være Nul, naar α_ν, β_ν opfylder de i Theorem 1 angivne Betingelser.

Theorem 3. Dersom baade α_ν og β_ν opfylder de i Theorem 1 angivne Betingelser, og desuden $\Sigma|b_\nu|$ er divergent, vil Kædebrøken være fuldstændig*) konvergent.

Theorem 4. Dersom α_ν og β_ν opfylder de i Theorem 3 angivne Betingelser, vil den reelle Del af en vilkaarlig Konvergent have samme Fortegn som α_1, medens Faktoren til i af den imaginære Del vil have samme Fortegn som $-\beta_1$.

Theorem 5. Dersom et endeligt Antal af α_ν eller af β_ν ikke opfylder de i Theorem 3 angivne Betingelser, vil Kædebrøken stadig konvergere, forudsat at der efter den sidste Uregelmæssighed findes idetmindste een Værdi af ν, for hvilken β_ν respektive α_ν er $\neq 0$.

Theorem 6. Naar $\Sigma|b_\nu|$ er divergent, vil Kædebrøken være konvergent, forsaavidt enten alle $(-1)^\nu\beta_\nu$ har samme Fortegn, samt $|\beta_\nu|:|\alpha_\nu|$ har en lavere Grænse >0, eller alle α_ν har samme Fortegn, samt $|\alpha_\nu|:|\beta_\nu|$ har en saadan lavere Grænse.

Theorem 7. Dersom alle α_ν har konstant Fortegn, og $|\alpha_\nu| \geqq |\beta_\nu|$, vil den reelle Del af enhver Konvergent have samme Fortegn som α_1; dersom alle $(-1)^\nu\beta_\nu$ har konstant Fortegn, og $|\beta_\nu| \geqq |\alpha_\nu|$, vil Faktoren til i af den imaginære Del af enhver Konvergent have samme Fortegn som $-\beta_1$.

Beviserne for disse Sætninger er ret komplicerede, og det er vel tvivlsomt, om de alle er ganske korrekte.

I en meget fortjenstfuld Fremstilling af den elementære Del af Kædebrøkernes Theori, som *Gmeiner* har givet**) i den nye Udgave af *Stolz*, Vorlesungen über die allgemeine Arithmetik, fremsættes

*) Unconditionally (unbedingt, parfaitement). Det er dog tvivlsomt, hvad *van Vleck* mener hermed.

**) O. Stolz und A. Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, Leipzig 1905. IIe Abteilung, S. 465—590.

der et korrekt Bevis*) for Theorem 3, iøvrigt i temmelig nøje Tilslutning til *van Vleck*. Herved angiver *Gmeiner* tillige følgende Betingelser for α_ν og β_ν. Af Forudsætningerne følger, at idetmindste een af Rækkerne $\Sigma|\alpha_\nu|$ og $\Sigma|\beta_\nu|$ maa divergere. Er det den første, saa skal der tillige mindst være et α_ν med ulige Indeks, som er $\neq 0$. Samme Betingelse skal gælde for β_ν, naar den sidste Række divergerer. Naar disse Betingelser, som ikke findes hos *van Vleck*, ikke er opfyldte, kan Kædebrøken meget vel være divergent. Som Eksempel angiver *Gmeiner* (l. c., S. 545, Noten), at den periodiske Kædebrøk $\frac{1}{0+}\frac{1}{b+}\frac{1}{0+}\frac{1}{b+}\cdots$ er divergent, da alle Konvergenter med ulige Indices er uendelige. Jeg vil hertil bemærke, at det samme gælder den mere almindelige Kædebrøk $\frac{1}{0+}\frac{1}{b_2+}\frac{1}{0+}\frac{1}{b_4+}$; dens Konvergenter er nemlig $\frac{1}{0}, \frac{b_2}{1}, \frac{1}{0}, \frac{b_2+b_4}{1}, \frac{1}{0}, \frac{b_2+b_4+b_6}{1}, \ldots$. Dette stemmer aabenbart daarligt med Theorem 3, hvorefter Kædebrøken skulde være fuldstændig konvergent, hvilket ifølge *Pringsheim***) vil sige, at den ikke kan blive divergent, selv naar der borttages et vilkaarligt Antal af de første Led (ufuldstændige Kvotienter). I denne Sammenhæng bør nævnes, at Kædebrøken $\frac{1}{b_1+}\frac{1}{0+}\frac{1}{b_3+}\cdots$, hvis Konvergenter er $\frac{1}{b_1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{b_1+b_3}, \frac{0}{1}, \frac{1}{b_1+b_3+b_5}, \frac{0}{1}, \ldots$, heller ikke er fuldstændig konvergent.

Med de øvrige Sætninger af *van Vleck* beskæftiger *Gmeiner* sig ikke.

I det følgende vil jeg generalisere Theorem 3, naturligvis med Tilføjelsen af saadanne Betingelser, at Sætningen bliver eksakt, og vise, at den nye udvidede Form for Sætningen tillige omfatter Theorem 6. Lad os tænke os b_ν beliggende i de komplekse Tals Plan. Theorem 3 udsiger da, at Kædebrøken er konvergent, naar $\Sigma|b_\nu|$ er divergent, og desuden $b_1, b_3, b_5, \ldots$ ligger i een af Planens 4 Kvadranter, medens $b_2, b_4, b_6, \ldots$ ligger i den Kvadrant, som er symmetrisk med den førstnævnte med Hensyn til de reelle Tals Akse. Hertil maa *Gmeiners* kompletterende Betingelse føjes, saafremt man da ikke udelukker, at *b*'erne kan falde paa Begrænsningen af Kvadranterne.

*) L. c. S. 545—550.

**) Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akademie d. W., Bd. 28, 1898, S. 299.

I Stedet for denne Sætning vil jeg bevise følgende simplere og langt almindeligere:

Kædebrøken er konvergent, naar $\Sigma |b_\nu|$ er divergent, og endvidere alle b_ν er beliggende i en Sektor af Planen med sit Toppunkt i o og defineret ved alle komplekse Tal med Argumenter imellem $-\frac{\pi - \varepsilon}{2}$ og $\frac{\pi - \varepsilon}{2}$, hvor ε er et vilkaarlig valgt, positivt, lille Tal*).

Ved en simpel Transformation af Kædebrøken til en dermed ækvivalent viser jeg endvidere, at den nævnte Sektor dublerer sig til to andre med samme Aabningsvinkel og Toppunkt, men symmetrisk beliggende med Hensyn til den reelle Akse**); den ene indeholder $b_1, b_3, b_5, \ldots$, den anden $b_2, b_4, b_6, \ldots$. *Gmeiner's* Betingelse bliver her at erstatte med følgende: hvis $b_1 = 0$, maa der i det mindste være et Par af b_ν med paa hinanden følgende Indices, som er $\neq 0$

Det er indlysende, at denne Sætning ogsaa omfatter *van Vleck's* Theorem 6. Med de øvrige Sætninger, dog med Undtagelse af Theorem 2, skal jeg ikke her beskæftige mig. Kun vil jeg bemærke, at Theorem 5 er urigtigt, eller i hvert Fald trænger til yderligere Præcision.

Jeg gaar nu over til Beviset for de nævnte Sætninger.

For Kædebrøken (1) antager vi den n^{te} Konvergent at være

$$K_n = \frac{T_n}{N_n} = \left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^n,$$

og man har da som bekendt den almindelige Rekursionsformel

$$N_n = b_n N_{n-1} + N_{n-2},\ N_0 = 1,\ N_1 = b_1, \tag{2}$$

hvilken ogsaa gælder for T_n, dog med $T_0 = 0$, $T_1 = 1$. Heraf udledes den bekendte Formel

$$K_{n+1} - K_n = \frac{(-1)^n}{N_{n+1} N_n}. \tag{3}$$

Saalænge ikke b_ν for bestemte Værdier af n kan antage Værdien ∞, eller med andre Ord $\frac{1}{b_\nu}$ blive $= 0$, hvilket Tilfælde paa Forhaand udelukkes, følger af (2) at to N_n med paa hinanden følgende Indices

*) Denne Sektor har saaledes en Aabningsvinkel, der er det dobbelte af den i Theorem 3 forekommende, saa nær man ønsker det.

**) Det er ligegyldigt, om de to Sektorer helt eller delvis dækker hinanden.

ikke samtidig kan være o. Var nemlig $N_p = 0$, $N_{p-1} = 0$, saa maatte ogsaa $N_{p-2} = 0$, o. s. v. lige ned til $N_0 = 0$, hvilket er umuligt.

Ved at multiplicere (2) med $\overline{N}_{n-1}$, hvorved betegnes den komplekse Værdi, der er konjugert til N_{n-1}, haves

$$N_n \overline{N}_{n-1} = b_n |N_{n-1}|^2 + \overline{N}_{n-1} N_{n-2},$$

og altsaa

$$\overline{N}_{n-1} N_{n-2} = \overline{b}_{n-1} |N_{n-2}|^2 + N_{n-2} \overline{N}_{n-3},$$

o. s. v., ...

$$\begin{cases} N_2 \overline{N}_1 = b_2 |N_1|^2 + \overline{b}_1 \\ \overline{N}_2 N_1 = \overline{b}_2 |N_1|^2 + b_1 \end{cases} \text{for } n \begin{cases} \text{lige} \\ \text{ulige.} \end{cases}$$

Ved Summation findes vor Hovedformel

$$(4) \qquad N_n \overline{N}_{n-1} = b_n |N_{n-1}|^2 + \overline{b}_{n-1} |N_{n-2}|^2 + b_{n-2} |N_{n-3}|^2 + \cdots + \begin{cases} \overline{b}_1 \\ b_1 \end{cases}, \quad n \begin{cases} \text{lige} \\ \text{ulige.} \end{cases}$$

Vi antager nu til en Begyndelse, at $b_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ ligger i en Halvplan tilhøjre for de imaginære Tals Akse eller paa selve Aksen, og vi har derfor $\alpha_\nu = \Re(b_\nu) \geqq 0$ eller ifølge (4)

$$(5) \qquad |N_n N_{n-1}| \geqq \Re(N_n \overline{N}_{n-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu |N_{\nu-1}|^2 \geqq 0,$$

som viser, at $\Re(N_n \overline{N}_{n-1})$ ikke er aftagende med voksende n.

Hvis $\alpha_1 > 0$, følger heraf straks $N_n \neq 0$ for alle n. Er derimod $\alpha_1 = 0$, antager vi, at der findes et Par α_ν med paa hinanden følgende Indices, som er > 0, nemlig $\alpha_p > 0$, $\alpha_{p+1} > 0$. Da følger af (5), at $N_p \neq 0$; thi hvis $N_p = 0$, saa er $N_{p-1} \neq 0$, og $0 = \alpha_p |N_{p-1}|^2$, hvilket strider mod vore Forudsætninger. Derfor er

$$\Re(N_n \overline{N}_{n-1}) \geqq \Re(N_{p+1} \overline{N}_p) \geqq \alpha_{p+1} |N_p|^2$$

for $n > p$. $|N_n N_{n-1}|$ har altsaa for tilstrækkelig store n en lavere Grænse > 0, og intet N_n kan for $n \geqq p$ være o, lige saa lidt som man kan have $\lim_{n=\infty} N_n = 0$*). Hermed er *van Vlecks's* Theorem 2 bevist, dog med Tilføjelse af en præciserende Betingelse, som indtræder for $\Re(b_1) = 0$. At Betingelserne i k k e kan undværes, fremgaar af Eksemplerne S. 5.

---

*) Derimod kunde man f. Eks. have $\lim_{n=\infty} N_{2n} = 0$ eller $\lim_{n=\infty} N_{2n+1} = 0$.

Vi antager først, at $\Sigma |b_\nu|$ er konvergent. Man ved da allerede ifølge en bekendt Sætning af *Stolz*, at Kædebrøken (1) er divergent. Dette følger af (3) og deraf, at man som bekendt har $|N_n| < \prod_{n=1}^{n}(1 + |b_\nu|)$, hvorfor $|N_n|$ maa have en endelig højere Grænse. I vort Tilfælde findes imidlertid et mere præcist Resultat. Da $|N_n N_{n-1}|$ har en lavere Grænse > 0, og $|N_{n-1}|$ en endelig højere Grænse, har ogsaa $|N_n|$ en lavere Grænse > 0. Nu er ifølge (3) og (2) for $n \geq p$

$$K_{n+2} - K_n = (-1)^n \left(\frac{1}{N_{n+1}N_n} - \frac{1}{N_{n+2}N_{n+1}}\right) = (-1)^n \frac{b_{n+2}N_n}{N_{n+2}N_n},$$

og derfor vil

$$\Sigma |K_{\nu+2} - K_\nu| = \Sigma \frac{|b_{\nu+2}|}{|N_{\nu+2}N_\nu|},$$

idet ν gennemløber Værdirækken m, $m+2$, $m+4$, . . ., hvor $m \geq p$, være konvergent. K_{m+2q} nærmer sig derfor for $\lim q = \infty$ bestemte Grænseværdier, saavel for m lige som for m ulige; men disse to Grænseværdier er indbyrdes forskellige, da deres Differens ifølge (3) maa være forskellig fra 0.

Hermed er bevist følgende Sætning: Naar i en Kædebrøk af Formen (1) alle $\mathfrak{R}(b_\nu) \geq 0$ og $\Sigma |b_\nu|$ er konvergent, samt endvidere i det Tilfælde, at $\mathfrak{R}(b_1) = 0$, man i det mindste for een Værdi af p har $\mathfrak{R}(b_p) > 0$, $\mathfrak{R}(b_{p+1}) > 0$, saa vil Konvergenterne med ulige Indices nærme sig en endelig bestemt Grænseværdi, med lige Indices en anden bestemt Grænseværdi, eller Kædebrøken vil oscillere (alternere) imellem to forskellige Grænseværdier*).

Denne Sætning er i det væsentlige identisk med *van Vleck's* Theorem 1, idet dog en præciserende Betingelse er tilføjet, for saa vidt $\mathfrak{R}(b_1) = 0$. Vi skal senere give Sætningen en langt almindeligere Form.

Vi vil nu antage $\Sigma |b_\nu|$ divergent, idet vi dog indskrænker Omraadet for b_ν en Smule. Vi antager nemlig $-\frac{\pi - \varepsilon}{2} \leq \arg (b_\nu) \leq \frac{\pi + \varepsilon}{2}$, hvor ε er et vilkaarlig valgt, positivt, lille Tal. Naar vi sætter $k = \operatorname{tg} \frac{\pi - \varepsilon}{2}$, er da $|\beta_\nu| \leq k\alpha_\nu$, og $|b_\nu| \leq (1 + k)\alpha_\nu$. Derfor er $\Sigma\alpha_\nu$ di-

*) Man kan tilføje, at Differensen imellem de to Grænseværdier ifølge (3), (4) og (5) er absolut $> \frac{1}{\sum_1^\infty |b_\nu| \prod_1^\infty (1 + |b_\nu|)^2}$ og absolut $< \frac{1}{\alpha_{p+1} |N_p|^2}$.

vergent, medens $\Sigma\beta_\nu$ og $\Sigma\,|\beta_\nu|$ kan være konvergente eller divergente ganske efter Omstændighederne.

Hvad ovenfor er vist om en lavere Grænse > 0 for $|N_n \bar{N}_{n-1}|$ gælder naturligvis ogsaa her, kun kan vi udtrykke det saaledes: hvis $b_1 \neq 0$, er der for alle n en lavere Grænse > 0; men hvis $b_1 = 0$, og $b_p \neq 0$, $b_{p+1} \neq 0$, er der for $n \geqq p$ en lavere Grænse > 0.

Vi sætter for Kortheds Skyld

$$N_n \bar{N}_{n-1} = s_n = \sigma_n + i\tau_n, \quad \sigma_n = \Re(s_n),$$

eller ifølge (4)

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu |N_{\nu-1}|^2, \quad \tau_n = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} \beta_\nu |N_{\nu-1}|^2,$$

hvoraf

$$|\tau_n| \leqq k\sigma_n, \quad \sigma_n \leqq |s_n| \leqq \sigma_n + |\tau_n| \leqq (1+k)\sigma_n$$

og

$$|s_n - \bar{s}_{n-1}| = |b_n|\,|N_{n-1}|^2 \leqq (1+k)\,\alpha_n |N_{n-1}|^2 = (1+k)(\sigma_n - \sigma_{n-1}).$$

Nu er

$$|K_{n+2} - K_n| = \left|\frac{b_{n+2}}{N_{n+2} N_n}\right| = \frac{|s_{n+2} - \bar{s}_{n+1}|}{|s_{n+2} s_{n+1}|} \leqq \frac{(1+k)(\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1})}{\sigma_{n+2}\sigma_{n+1}}$$
$$= (1+k)\left(\frac{1}{\sigma_{n+1}} - \frac{1}{\sigma_{n+2}}\right),$$

og følgelig er $\Sigma\,|K_{\nu+2} - K_\nu|$ konvergent ganske som ovenfor, idet ν gennemløber Rækken $\nu = m, m+2, m+4, \ldots (m \geqq p)$. K_{m+2q} nærmer sig bestemte og endelige Grænseværdier for lim $q = \infty$ saavel for m lige som for m ulige. Da endvidere

$$|K_{n+1} - K_n| = \frac{1}{|s_n|} \leqq \frac{1}{\sigma_n},$$

følger heraf, at Kædebrøken er konvergent for $\lim_{n=\infty} \sigma_n = \infty$. For at vise dette, antager vi, at σ_n var endelig, eller $\Sigma\alpha_\nu |N_{\nu-1}|^2$ konvergent. Man vilde da have for $n > p$

$$\left|\frac{N_{n+2}}{N_n}\right| = \left|\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}\right| \leqq 1 + \left|\frac{s_{n+2} - \bar{s}_{n+1}}{s_{n+1}}\right| \leqq 1 + (1+k)\frac{\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1}}{\sigma_{n+1}}$$
$$\leqq 1 + (1+k)\frac{\sigma_{n+2} - \sigma_{n+1}}{\sigma_{p+1}}$$

og

$$\left|\frac{N_{m+2q}}{N_m}\right| = \prod_{\nu=0}^{q-1} \left|\frac{s_{m+2\nu+2}}{s_{m+2\nu}}\right|;$$

men da det sidste Produkt vilde have en endelig højere Grænse, fordi $\Sigma(\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu)$ er forudsat at være konvergent, maatte $|N_{m+2q}|$ have en endelig højere Grænse saavel for m lige som for m ulige, og alt-

saa $|N_n|$ en endelig højere Grænse. Heraf vilde følge $\Sigma \alpha_\nu$ konvergent i Strid med vore Forudsætninger; lim σ_n kan derfor ikke være endelig.

Hermed er bevist følgende Sætning. Naar i en Kædebrøk af Formen (1) alle $\arg(b_\nu)$ ligger mellem $-\frac{\pi - \varepsilon}{2}$ og $\frac{\pi - \varepsilon}{2}$, hvor ε er vilkaarlig, lille, positiv, og $\Sigma|b_\nu|$ er divergent, samt endvidere for det Tilfælde, at $b_1 = 0$, man har $b_p \neq 0$, $b_{p+1} \neq 0$ (for i det mindste een Værdi af p), saa vil Kædebrøken være konvergent.

De beviste Sætninger kan gives en almindeligere Form, naar vi transformerer Kædebrøken (1) til en dermed ækvivalent. Man har som bekendt, at Kædebrøkerne

$$\left[\frac{1}{b_\nu}\right]_1^n \text{ og } \frac{1}{c_0}\left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_1^n$$

er ækvivalente, idet Konstanterne c_ν er vilkaarlige endelige og $\neq 0$. Sættes derfor $c_0 = c_2 = c_4 = \ldots = e^{\theta i}$, $c_1 = c_3 = c_5 = \ldots = e^{-\theta i}$, hvor θ er reel, gaar de beviste Sætninger over til følgende.

Naar $\Sigma|b_\nu|$ er konvergent, og $b_1, b_3, b_5, \ldots$ er beliggende i en Halvplan eller paa dens Begrænsningslinie gennem 0, medens $b_2, b_4, b_6, \ldots$ paa samme Maade er beliggende i en Halvplan, symmetrisk med den første med Hensyn til den reelle Akse, samt endvidere i det Tilfælde, hvor b_1 falder paa sin Begrænsningslinie, der findes mindst een Værdi af p, for hvilken b_p, b_{p+1} falder indenfor deres respektive Begrænsningslinier, saa vil Kædebrøken (1) alternere imellem to forskellige endelige Grænseværdier, hvis Differens tilfredsstiller de i Noten S. 85 nævnte Uligheder.

Naar $\Sigma|b_\nu|$ er divergent, og $b_1, b_3, b_5, \ldots$ er beliggende i en uendelig Sektor med Toppunktet i 0 og Aabningsvinklen $\pi - \varepsilon$, hvor ε er vilkaarlig lille positiv, medens $b_2, b_4, b_6, \ldots$ ogsaa er beliggende i en Sektor med samme Toppunkt og Aabningsvinkel, men symmetrisk med den første med Hensyn til den reelle Akse, samt endvidere i det Tilfælde, hvor $b_1 = 0$, der findes mindst een Værdi af p, for hvilken $b_p \neq 0$, $b_{p+1} \neq 0$, saa vil Kædebrøken (1) være konvergent*).

Disse Sætninger indeholder, som ovenfor nævnt, *van Vleck*'s Theoremer 1, 3 og 6 som specielle Tilfælde.

*) Det er let at indse, at Kædebrøken er fuldstændig konvergent, naar alle $b_\nu \neq 0$.

Nogle Opgaver med uendelig mange Løsninger.

Af **C. Juel.**

Det følgende indeholder i det væsentlige nogle nye Eksempler paa den Art Opgaver, der faar uendelig mange Løsninger derved, at den har én. Det vigtigste af de Arbejder af almindelig Karakter, der er fremkommen om de herhen hørende Lukningsopgaver, er vistnok *Hurwitz'* »Über Schliessungsprobleme« Mathem. Ann. Bd. XV S. 58. I denne Afhandling findes saavel en almindelig Theori som ogsaa en Række af gamle og nye meget interessante Eksempler. Her er der nu den Mærkelighed, at der mangler det berømteste af alle gamle Eksempler, nemlig Poncelets Sætning, der som bekendt lyder:

»Naar $\alpha\beta_1 \cdots \beta_n$ er Keglesnit i et Bundt, og der findes én i α indskrevet n-kant, hvis Sider berører $\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n$, saa vil der findes en kontinuert Række saadanne.«

Derimod findes den specielle Ponceletske Sætning, hvor alle Keglesnittene β falder sammen.

Denne Undladelse er ikke tilfældig, thi den Metode, der angives, kan ikke bruges ved den almindelige Sætning, hvad der maaske nok kan være Grund til at fremhæve*).

De første Eksempler i det følgende (Nr. 1—6) giver nu Udvidelser af de bekendte Sætninger om Polartrekanter og Polartetraedre af samme Art som den, der finder Sted ved Overgang fra den specielle til den almindelige Ponceletske Sætning. For denne sidste giver jeg dernæst et simpelt Bevis ved at gaa over til en plan Kurve af 3die Orden. Denne Ide er ganske vist ikke ny, idet man ad den Vej har udledet Steiner's Sætning af den specielle Ponceletske (er rimeligvis gjort saa-

---

*) Derimod kan der nok være Tale om at bruge Methoden efter en Transformation, men denne kan ikke være éntydig.

dan af Steiner selv). Men da man i hvert Fald kun har faa Beviser, der ikke bruger infinitesimale Betragtninger, har jeg ment, at det kunde have en Plads her.

Efter en rumgeometrisk Sætning, som i sin fulde Skikkelse først er udviklet af Prof. Zeuthen, — mit Bevis ved Hjælp af Beliggenhedstal har jeg delvis allerede givet tidligere i min Disputats — behandler jeg en nærbeslægtet Opgave, som trods sin Simpelhed turde have nogen Interesse derved, at den, saavidt jeg véd, er den første Opgave af den her behandlede Art, der er udtrykt i ren algebraisk Form.

1. I det følgende har vi Brug for den elementære Sætning:

Er A_1A_2, B_1B_2, D_1D_2, C_1C_2 i denne Rækkefølge fire harmoniske Punktpar i en Involution, vil Punkterne B_1 og C_1 — eller B_1 og C_2 — skille A_1 og A_2 harmonisk, saafremt Punkterne D_1 og D_2 gør det — og omvendt.

Rigtigheden heraf ser man let ved at tænke sig Punktparrene paa et Keglesnit. Linierne $A_1A_2 \cdots C_1C_2$ gaar da gennem samme Punkt O og er i deres Orden fire harmoniske Straaler. Hvis nu D_1D_2 skiller A_1A_2 harmonisk, gaar Linien D_1D_2 gennem Polen Q til A_1A_2. I en involutorisk Centralkollineation med Q til Centrum og A_1A_2 til Akse, vil nu Keglesnittet svare til sig selv, og Linien B_1B_2 til C_1C_1, saa at enten B_1C_1 eller B_1C_2 maa gaa gennem Q ɔ: et af disse Punktpar skiller A_1A_2 harmonisk. Den omvendte Sætning ses ved samme Figur.

2. Lad α, β og γ være tre Keglesnit i samme Bundt; vi vil søge Indhyllingskurven μ for de rette Linier l, der skærer β i et Punkt B_1 og γ i et Punkt C_1, saaledes at B_1 og C_1 er konjugerede med Hensyn til α. Lad δ være det Keglesnit i Bundtet, der er harmonisk skilt fra α ved β og γ, og lad α, β, γ, δ af l skæres i Punktparrene $A_1A_2 \cdots D_1D_2$. Da B_1C_1 skal skille A_1A_2 harmonisk, maa efter den ovennævnte Sætning ogsaa D_1D_2 skille A_1A_2 harmonisk. Det følger dernæst af en bekendt Sætning, at Indhyllingskurven bliver et Keglesnit. Selve den benyttede Sætning bevises forøvrigt vistnok simplest ved Hjælp af det her fremsatte. Da man nemlig ifølge (1) kan ombytte β og γ med to hvilkesomhelst andre Keglesnit, der skiller α og δ harmonisk, kan man vælge β som et Liniepar, og Beviset er da meget let at føre. Kurven μ vil tilhøre det reciprokke Bundt, der er bestemt ved Tangenterne til α i dettes Skæringspunkter med β.

3. Det er bekendt, at der findes uendelig mange Polartrekanter til et Keglesnit α indskreven i et Keglesnit β, naar der findes én saa-

dan. Vi vil udvide denne Sætning paa lignende Maade som den, hvorved man gaar over fra den specielle Ponceletske Sætning til den almindelige, idet vi lader Polartrekantens Vinkelspidser løbe paa hver sit Keglesnit $\beta_1\beta_2\beta_3$ i et Bundt, der tillige indeholder α.

De Linier m, der skærer β_1 og β_2 i konjugerede Punkter med Hensyn til α, indhyller efter (2) et Keglesnit, der ikke har andre Fællestangenter med α end de Tangenter, der berører α i Skæringspunkterne med β. Derfor vil det geometriske Sted for m's Pol med Hensyn til α være et Keglesnit i Bundtet; ifald det har et Punkt fælles med β_3 udenfor α, vil det falde sammen med β_3. ɔ:

Der findes uendelig mange Polartrekanter med Hensyn til et Keglesnit, hvis Vinkelspidser ligger paa hver sit givne Keglesnit, saafremt alle Keglesnittene tilhører samme Bundt, og der findes én saadan Polartrekant.

4. De tre Keglesnit $\beta_1\beta_2\beta_3$ kan siges at danne et om α harmonisk omskrevet Tripel. Er α givet, og ligger β_3 fast, er det let at se, at β_1 og β_2 vil beskrive projektive og tillige involutoriske Rækker i Bundtet; falder β_1 i α, maa ogsaa β_2 falde i α. Man maa derfor have en Ligning af Formen

$$(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_1) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_2) = k,$$

hvor ε og ε^1 er to vilkaarligt valgte faste Flader i Bundtet, og k er afhængig af ε, ε^1 og β_3.

Er nu $\beta_1\beta_2\beta_3$ og $\beta_1^1\beta_2^1\beta_3^1$ to om α omskrevne Tripler, kan man altid bestemme et tredie Tripel, der har en Kurve fælles med hver af de givne; lad det være $\beta_1\beta_1^1\beta$. Man har da

$$(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_2) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_3) = (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_1^1) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta)$$
$$(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_1) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta) = (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_2^1) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_3^1).$$

Ved Addition af disse ser man, at man maa have en Ligning af Formen

$$(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_1) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_2) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_3) = k,$$

hvor k nu kun afhænger af ε og ε^1.

Der maa nu i Bundtet findes ét Keglesnit α^1, der er harmonisk omskrevet om α; og det bestemmes ved

$$(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_1) + \varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_2) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_3) = 3(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\alpha^1).$$

Vælges ϵ i α^1, faar man heraf

$$(\alpha^1\varepsilon^1\beta_1) + (\alpha^1\varepsilon^1\beta_2) + (\alpha^1\varepsilon^1\alpha\beta_3) = 0.$$

Falder β_2 og β_3 sammen, har man

$$(\alpha^1\varepsilon^1\alpha\beta_1) + 2(\alpha\varepsilon^1\alpha\beta_2) = 0,$$

eller ved at vælge ε^1 i β_2

$$(\alpha^1\beta_2\alpha\beta_1) = -2.$$

5. Vi vil nu gaa over til Rummet og betragte fire Flader af anden Orden α, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, der alle tilhører samme Bundt, og spørge om Indhyllingsfladen for de Planer, der skærer $\beta_1\beta_2\beta_3$ i et Tripel Keglesnit med Hensyn til Skæringskurverne med α, eller kortere sagt med Hensyn til α.

Lad P være er vilkaarligt Punkt i Rummet, og lad β være den-Flade i Bundtet, der gaar gennem P. Vi bestemmer nu en Flade β^1 i Bundtet ved Relationen

$$(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_1) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_2) + (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_3) = (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta) + 2(\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta^1).$$

Her er ε og ε^1 to vilkaarlige Flader i Bundtet, men Valget af disse paavirker ikke β^1. Den Kurve, hvori β^1 skæres af Ps Polarplan med Hensyn til α, projiceres fra P ved en Kegle, hvis Tangentplaner ifølge (4) bestemmer de gennem P gaaende Planer af den søgte Beskaffenhed. Man har altsaa

Er $\alpha\beta_1\beta_2\beta_3$ fire Keglesnitsflader i samme Bundt, vil Indhyllingsfladen for de Planer, der skærer $\beta_1\beta_1\beta_3$ i et Tripel Keglesnit med Hensyn til α, være en Flade af anden Orden.

Indhyllingsfladen er indskreven i den Devellopable ρ^{IV}, der er omskreven om α langs Bundtets Grundflade.

6. Lad nu $\alpha\alpha_1\beta_2\beta_3\beta_4$ være fem Flader af anden Orden i samme Bundt, og lad os antage, at der findes et Polartetraeder $A_1A_2A_3A_4$ til α, af hvis Hjørnespidser A_1 ligger paa $\beta_1 \cdots A_4$ paa β_4. $A_2A_3A_4$ er en Polartrekant med Hensyn til α. Findes der flere Polartetraeder med samme Egenskab, maa alle Planerne $A_2A_3A_4$ skære α i et Tripel Keglesnit med Hensyn til α. Men alle saadanne Planer indhyller efter (5) en Flade φ af anden Orden, der er indskreven i ρ^{IV}. Det geometriske Sted for Polerne til disse Planer bliver en Keglesnitsflade β, der er reciprok Polarfigur til φ med Hensyn til α, og den vil altsaa gaa gennem Bundtets Grundkurve r^4 d. v. s. tilhøre Bundtet. Men β og β_4 maa falde sammen, da de udenfor r^4 har et Punkt A_1 fælles. Man har altsaa:

Naar $\alpha\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ er fem Flader i samme Bundt, og der findes ét Polartetraeder med Hensyn til α, der har én Hjørne-

spids paa hver sin af de andre Plader, vil der findes en tredobbelt Uendelighed af saadanne Polartetraedre.

Fladerne $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ kan siges at danne et Quadrupel, der er harmonisk omskrevet om α. Er $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ og $\beta_1^1\beta_2^1\beta_3^1\beta_4^1$ to om α omskrevne harmoniske Kvadrupler, ses det som i Planen, at man maa have

$$\sum_0^4 (\varepsilon\varepsilon^1\alpha\beta_r) = k, \text{ hvor } k \text{ kun er afhængig af } \varepsilon \text{ og } \varepsilon^1.$$

Da det ved selve ovenstaaende Ligning godtgøres, at der eksisterer en om α harmonisk omskrevet Flade α^1 i Bundtet, faar man ved at vælge ε i α^1.

$$\sum_1^4 (\alpha^1\varepsilon^1\beta_r) = 0.$$

Herved ser man, hvorledes Fladerne skal bestemmes saaledes, at enten 2 eller 3 falder sammen.

7. Den interessanteste af alle Opgaver med eventuel uendelig mange Løsninger har man vistnok stadig i Poncelet's gamle Sætning. For denne er der ogsaa i Tidens Løb givet en Mængde Beviser. De fleste af disse benytter ligesom Poncelets eget infinitesimale Betragtninger. Den Idé, der ligger til Grund for det følgende, nemlig at gaa over til Bundtet og derfra til en plan Kurve af tredie Orden, er i og for sig velkendt. Selve den følgende korte Formulering af et herpaa bygget rent projektiv geometrisk Bevis har jeg dog ikke set. Fra Læren om Kurver af 3die Orden benyttes kun følgende: »Naar en ret Linie skærer Kurven C^3 i Punkterne MG_2M_2, og en anden ret Linie skærer den i $M^1F_1M_1^1$, vil de nye Skæringspunkter mellem Kurven og Linierne MM^1, G_2F_1 og $M_2M_1^1$ ogsaa ligge ud i ret Linie.«

Da Poncelets Sætning skal forstaas i sin almindelige Form og ikke i den specielle, er det fuldt ud tilstrækkeligt at bevise den for en Trekant.

Et Bundt Keglesnit kan man altid opfatte som Projektionen af Konturerne af et Bundt Keglesnitsflader fra et Punkt O, der har samme Polarplan ω med Hensyn til alle Fladerne. De to Sæt Frembringere i disse skal benævnes $f \cdots$ og $g \cdots$ Lad Bundtets Grundkurve være r^4, og lad α_1^2 og α_2^2 være to af Bundtets Flader. Er nu M et Punkt af r^4, kan man gennem M drage en Frembringer f_1 i α_1^2 og en Frembringer f_2 i α_2^2. Skærer disse paany Rumkurven i M_1 og M_2, kommer det an paa at indse, at Planen OM_1M_2 i sine forskellige Stillinger indhyller en Kegle, der er omskreven om en Flade i det givne Bundt. Dette kan nu ikke gøres ved at prøve paa at godtgøre, at Linierne M_1M_2 danner en Frembringerrække paa en Flade i Bunden,

thi dette er ikke Tilfældet. Men Linien OM skærer r^4 anden Gang i et Punkt M^1, og den derigennem gaaende Frembringer g_1^1 i α_1, vil paa Grund af Figurens projektive Selvsymmetri for O som Fællespunkt og ω som Fællesplan skære r^4 i et Punkt M_1^1, der maa ligge i ret Linie med O og M_1. I Stedet for at søge Enveloppen for Planen OM_1M_2, kan man altsaa søge den for Planen $OM_1^1M_2$. Her kan man vise at alle Linierne $M_1^1M_2$ vil være Frembringere i en Flade i Bundtet, idet de alle vil skære en og samme Dobbeltsekant til r^4.

Lad S være et Skæringspunkt mellem ω og r^4, og lad g_2^s og f_1^s være to gennem S gaaende Frembringere henholdsvis i α_2 og α_1. Fra S vil vi projicere Figuren ind paa en Plan; r^4 projicerer i en Kurve C_1^3 og Projektionerne af $M_2\, M\, M^1\, M_1^1\, O f_1^s$ og g_2^s vil vi betegne ved $M_2^s \cdots O^s F_1^s$ og G_2^s. Nu vil $M^s M_2^s$ gaa gennem G_2^s, $M^{1s} M_1^{1s}$ gennem F_1^s og $M^s M^{1s}$ gennem O^s. Men det sidste Punkt ligger ogsaa paa C^3, thi Linien SO berører r^4 i S. Det Punkt N, hvori $M_2^s M_1^{1s}$ for tredie Gang skærer C^3, vil derfor efter den nævnte Hjælpesætning ligge paa den Linie, der forbinder O^s med det tredie Skæringspunkt mellem Kurven og Linien $F_1^s G_2^s$. N bliver altsaa et fast Punkt, og alle Linierne $M_1^1M_2$ vil skære den faste Dobbeltsekant SN.

Poncelets Sætning er herved fuldstændig bevist i sin almindelige Skikkelse. Den benyttede Hjælpesætning kan, da den plane tredie Grads Kurve her netop er defineret som Projektion af Rumkurven r^4, om man vil, tænkes godtgjort ved Hjælp af Hovedsætningen om Knipper af Keglesnitsflader.

8. Af Poncelets Sætning er der i flere forskellige Retninger givet interessante Udvidelser til Rummet. Jeg skal ikke gaa ind herpaa, men kun behandle en enkelt rumgeometrisk Opgave af den Art, der her er Tale om. Sætningen er først fremstillet af Prof. *Zeuthen* i Mathem. Annalen Bd. 18, men jeg havde tidligere været inde paa den ad en anden Vej, nemlig ved Benyttelse af Beliggenhedstal i Planen. Den lyder:

Har man en Flade af anden Orden og et lige Antal Punkter $P_1, P_2 \cdots P_{2n}$ i Rummet, kan man søge en saadan — cirkulær — Række Keglesnit $K_1, K_2 \cdots K_{2n}$ paa Fladen, at K_1 og K_2 ligger paa en Kegleflade med Toppunkt i P_1, K_2 og K_3 paa en Kegleflade med Toppunkt i $P_2 \cdots$, K_{2n} og K_1 paa en Kegleflade med Toppunkt i P_{2n}; denne Opgave har enten ingen eller uendelig mange Løsninger.

Lad den Flade, der er Tale om, være en Kugle, hvad der her kan være tilstrækkeligt. Er nu M_1^x og M_2^x to Punkter af Kuglen, hvis Forbindelseslinie gaar gennem et fast Punkt P^x i Rummet, vil disse ved stereografisk Projektion fra et Punkt O af Kuglen gaa over i Punkterne M_1 og M_2, der ligger ud i ret Linie med Projektionen P af P^x. Men ligedannede Trekanter viser

$$PM_1 \cdot PM_2 = P^xM_1^x \cdot P^xM_2^x \cdot \overline{O}\overline{P}^2 : \overline{O}\overline{P}^{x2} = \text{konst.};$$

derfor er M_1 og M_2 tilsvarende Punkter i inverse Figurer med P som Inversionspol. Vælges dette Punkt til Begyndelsespunkt, og den retvinklede Projektion af OP paa Planen til X-akse i et retvinklet Koordinatsystem, vil Beliggenhedstallene x_1 og x_2 for M_1 og M_2 være forbundne ved en Ligning af Formen

$$x_1\overline{x}_2 = k.$$

Sammensætter man nu et lige Antal af saadanne Inversioner for forskellige Punkter som Poler, bliver Beliggenhedstallene x og y for tilsvarende Punkter forbundne ved en Ligning af Formen

$$axy + bx + cy + d = 0, \tag{1}$$

medens man ved et ulige Antal faar en Ligning af Formen

$$ax\overline{y} + bx + c\overline{y} + d = 0.$$

Vi vil her alene holde os til den første Mulighed. Ligningen for en Cirkel er

$$\mathfrak{a}x\overline{x} + mx + \overline{m}\,\overline{x} + \mathfrak{r} = 0, \tag{2}$$

hvor $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{r}$ er reelle*).

Nu kan (1), naar Dobbeltpunkterne er adskilte, altid skrives paa Formen

$$bx + cy = 0 \quad (b + c \neq 0) \tag{3}$$

Den til (2) svarende Cirkel bliver

$$\mathfrak{a}y\overline{y} - m\frac{\overline{b}}{\overline{c}}\,y - \overline{m}\frac{b}{c}\,\overline{y} + \mathfrak{r}\,\frac{b\overline{b}}{c\overline{c}} = 0. \tag{4}$$

Ifald nu

I. $$b = c,$$

hvorved Afhængigheden bliver involutorisk, kræver Sammenfald af (2) og (4) enten $m = 0$ eller $\mathfrak{a} = \mathfrak{r} = 0$ d. v. s. enhver Cirkel i en af de to Bundter

*) Det følgende Bevis gives i lidt mere udført Skikkelse efter min Disputats »Bidrag til den imaginære Sinus og den imaginære Plans Geometrie« Side 31.

$$m x + \overline{m}\,\overline{x} = 0 \text{ og } \mathfrak{a} x \overline{x} + \mathfrak{r} = 0$$

vil svare til sig selv.

I det almindelige Tilfælde er er Betingelsen for Sammenfald af (2) og (4)

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} = -\frac{\overline{m}c}{m\overline{b}} = -\frac{m\overline{c}}{\overline{m}b} = \frac{\mathfrak{r} c \overline{c}}{\mathfrak{r} b \overline{b}}.$$

Ifald nu $m = 0$, en Betingelse, der ikke kan forbindes med $\mathfrak{a} = 0$ eller $\mathfrak{r} = 0$, faar man:

II. $$b\overline{b} = c\overline{c}.$$

I dette Tilfælde vil enhver Cirkel i Bundtet

$$x\overline{x} + \mathfrak{r} = 0$$

svare til sig selv.

Ifald endelig $m \neq 0$, maa man have baade $\mathfrak{a} = 0$ og $\mathfrak{r} = 0$, idet man, naar f. Eks. alene $\mathfrak{a} = 0$, vilde føres tilbage til det førstnævnte Tilfælde. Der kræves altsaa

III. $$b\overline{c} = \overline{b}c,$$

og enhver Cirkel i Bundtet

$$m x + \overline{m}\,\overline{x} = 0$$

svarer til sig selv.

Har (1) sammenfaldende Dobbeltpunkter, kan den altid skrives paa Formen

IV. $$x = y + a;$$

og den tilsvarende til (2) bliver

$$\mathfrak{a} y \overline{y} + (m + \mathfrak{a}\overline{a}) y + (\overline{m} + \mathfrak{a} a)\overline{y} + \mathfrak{a} a \overline{a} + m a + \overline{m}\,\overline{a} + \mathfrak{r} = 0.$$

Denne kan kun falde sammen med (2), naar

$$\mathfrak{a} = 0, \; m a + \overline{m}\,\overline{a} = 0.$$

Her vil der altid findes uendelig mange Cirkler, der svarer til sig selv, og Fællesligningen for disse bliver

$$\overline{a} x - a \overline{x} + i\mathfrak{r} = 0,$$

hvor $\mathfrak{r}$ er et vilkaarligt reelt Tal og $i^2 = -1$. Man ser altsaa, at der i alle Tilfælde findes enten ingen eller uendelig mange Løsninger.

Det er ikke min Mening at gaa ind paa de mange hertil knyttede interessante Sætninger, som er givne af *Zeuthen*; jeg kan som Eksempel nævne, at Opgaven har uendelig mange Løsninger, ifald i Rummet $P_1 = P_{2n+2}$, $P_2 = P_{2n+3} \cdot \cdot P_{2n+1} = P_{4n+2}$.

Lad den Transformation i Planen man ledes til ved at benytte de $2n + 1$ førte Punkter, være

$$bx + c\bar{y} = 0.$$

Ved Iteration gaar den over i

$$b\bar{b}x - c\bar{c}y = 0,$$

og denne giver efter det ovennævnte Tilfælde III uendelig mande Løsninger.

9. Derimod skal jeg gaa noget ind paa en anden nærstaaende Opgave, der i Modsætning til de tidligere naturligst udtrykkes paa ren algebraisk Form. Grunden til, at man saavidt jeg ved ikke før har funden Anledning til at udtrykke en Lukningssætning paa den Maade, turde vel nærmest bero paa, at en algebraisk Ligning, der faar uendelig mange Løsninger, bliver identisk, saa at Sætningens Formulering let vilde blive triviel. Det nævnte gælder ikke om Ligninger, der foruden den Variable indeholder dennes Omlagte; her findes der, som særlig *Thiele* har gjort opmærksom paa, rige Muligheder for partiel Ubestemthed.

Jeg skal her nøjes med udtrykkelig at formulere og bringe Sætningen for 2 Variable, men den tilsvarende er gyldig for n Variable. Den lyder:

Har man et System af Ligninger

(a) $$\rho y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2;\ \rho y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

med komplekse Koefficienter, kan dette i Almindelighed ikke ved Indførelse af kongrediente nye Variable bringes paa en Form, hvor alle Koefficienterne er reelle, men har Opgaven én Løsning, vil der findes uendelig mange væsentlig forskellige.

Man kan lægge Vægten paa, at der tales om »væsentlig forskellige« Løsninger, d. v. s. Løsninger, som ikke kan dannes af én dem ved Tilføjelse af en Transformation med reelle Koefficienter — ellers er Sætningen triviel.

Lad os som før først antage, at Dobbeltpunkterne i den ved (a) bestemte Correlation er adskilte; dens Ligninger kan da altid ved en enkelt Transformation bringes paa Formen

$$\rho y_1 = \lambda x_1;\ \rho y_2 = \mu x_2 \quad (\lambda \neq \mu).$$

Denne søges ved Transformationen

(c)
$$\sigma x_1 = \alpha x_1^1 + \beta x_2^1$$
$$\sigma x_2 = \gamma x_1^1 + \delta x_2^1$$

ændret til en anden med reelle Koefficienter. Ændres (b) ved (c), faar man

$$\rho_1 y_1^1 = (\lambda\alpha\delta - \mu\beta\gamma)x_1^1 + (\lambda - \mu)\beta\delta x_2^1;$$
$$\rho_1 y_2^1 = (\mu - \lambda)\alpha\gamma x_1^1 + (\mu\alpha\delta - \lambda\beta\gamma)x_2^1.$$

Her skal alle Forholdene mellem Koefficienterne paa Ligningernes højre Side være reelle.

Da $\lambda \neq \mu$, skal altsaa baade $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ og $\frac{\lambda\alpha\delta - \mu\beta\gamma - (\mu\alpha\delta - \lambda\beta\gamma)}{(\lambda - \mu)\beta\delta}$

$$= \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}$$

være reelle. Her har vi indtil videre forudsat $\beta\delta \neq 0$. Da de to Forhold $\frac{\alpha}{\beta}$ og $\frac{\gamma}{\delta}$ derfor maa være Rødder i en Ligning af anden Grad med reelle Koefficienter, er der to Muligheder at tage Hensyn til.

I. Begge Forholdene $\frac{\alpha}{\beta}$ og $\frac{\gamma}{\delta}$ er reelle.

Her kan man yderligere benytte sig af, at Forholdet

$$\frac{\lambda\alpha\delta - \mu\beta\gamma}{(\lambda - \mu)\beta\delta} = \mu \frac{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta}}{\lambda - \mu} + \frac{\alpha}{\beta}$$

skal være reelt. Dette viser, at ogsaa Forholdet $\frac{\mu}{\lambda - \mu}$, altsaa ogsaa $\frac{\lambda}{\mu}$ maa være reelt. Naar denne Betingelse ikke er opfyldt, findes ingen Transformation af den søgte Beskaffenhed; men er den tilfredsstillet, findes uendelig mange væsentlig forskellige bestemte ved Ligningerne

$$\sigma x_1 = \alpha(x_1^1 + r_1 x_3^1)$$
$$\sigma x_2 = \delta(x_1^1 + r_2 x_2^1).$$

Her er α og δ vilkaarlige, r_1 og r_2 reelle Tal, (b) transformeres ved (c) til

$$\rho_1^1 y_1^1 = \left(r_2\frac{\lambda}{\mu} - r_1\right)x_1^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1\right)r_1 r_2 x_2^1$$
$$\rho_1^1 y_2^1 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)x_1^1 + \left(r_2 - \frac{\lambda}{\mu}r_1\right)x_2^1.$$

II. Forholdene $\frac{\alpha}{\beta}$ og $\frac{\gamma}{\delta}$ er konjugert imaginære.

Lad os sætte $\alpha = \xi\beta$, $\gamma = \bar{\xi}\delta$.

Her er det nemmest at benytte sig af, at det følgende Forhold skal være reelt:

$$\frac{\lambda\alpha\delta - \mu\beta\gamma + \mu\alpha\delta - \lambda\beta\gamma}{(\lambda - \mu)\beta\delta} = \frac{(\lambda + \mu)(\xi - \bar{\xi})}{\lambda - \mu}.$$

Sættes denne Brøk lig sin omlagte, faar man, da $\xi \neq \bar{\xi}$, Betingelsen

$$\lambda\bar{\lambda} = \mu\bar{\mu},$$

eller, at Modulus for $\frac{\lambda}{\mu}$ skal være lig I. Er denne ikke tilfredsstillet, findes ingen Løsninger, ellers uendelig mange, fremstillede ved

$$\sigma x_1^1 = \beta(\xi x_1^1 + x_2^1)$$
$$\sigma x_2^1 = \delta(\bar{\xi} x_1^1 + x_2^1).$$

Ved Transformationen gaar den givne Correlation over i:

$$\rho_1^1 y_1^1 = \frac{\lambda\xi - \mu\bar{\xi}}{\mu - \lambda} x_1^1 - x_2^1$$
$$\rho_1^1 y_2^1 = \xi\bar{\xi} x_1^1 + \frac{\mu\xi - \lambda\bar{\xi}}{\mu - \lambda} x_2^1,$$

hvor det er let at se, at alle Koefficienter paa højre Side af Lighedstegnet virkelig er reelle.

De specielle Tilfælde $\beta = 0$, $\delta = 0$ ses let at falde ind under Hovedtilfældet I.

III. Vi mangler endnu den Mulighed, at Dobbeltpunkterne i Correlationen er sammenfaldende. I Stedet for (b) kan man da benytte Ligningerne

(d) $$\rho y_1 = x_1 + a x_2 \quad (a \neq 0)$$
$$\rho y_2 = x_2.$$

Transformeres disse ved (c) faar man

$$\rho_1 y_1^1 = (\alpha\delta + a\gamma\delta - \beta\gamma) x_1^1 + a\delta^2 x_2^1,$$
$$\rho_1 y_2^1 = -\alpha\gamma^2 x_1^1 + (\alpha\delta - \beta\gamma - a\gamma\delta) x_2^1.$$

Af disse følger let (for $\delta \neq 0$)

$$\frac{a\gamma\delta}{a\gamma^2} = \frac{\delta}{\gamma} = \mathfrak{r}_1, \text{ og } \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{a\gamma^2} = \frac{\alpha\mathfrak{r} - \beta}{a\gamma} = \mathfrak{r}_1,$$

hvor $\mathfrak{r}$ og $\mathfrak{r}_1$ er reelle. Den søgte Transformation eksisterer altsaa altid i dette Tilfælde og bestemmes ved

$$\sigma x_1 = \alpha x_1^1 + (\mathfrak{r}\alpha - a\mathfrak{r}_1\gamma) x_2^1$$
$$\sigma x_2 = \gamma(x_1^1 + \mathfrak{r} x_2^1).$$

Den givne Correlations Ligninger faar ved Ændringen reelle Koefficienter, idet Indsættelse giver

$$\rho^1_1 y^1_1 = (\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r})x^1_1 + \mathfrak{r}^2 x^1_2$$
$$\rho^1_1 y^1_2 = -x^1_1 + (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r})x^1_2.$$

De specielle resterende Tilfælde, hvor $\delta = 0$, ses let at give Resultater, der er indbefattede i det almindelige.

Det udviklede er forøvrigt i det væsentlige tilstrækkeligt til at bevise ogsaa den almindelige Sætning for et vilkaarligt n i det Tilfælde, hvor alle Dobbeltelementerne i Correlationen er adskilte; thi Correlationens Ligninger kan i saa Fald bringes paa Formen

$$\rho y_1 = \mu_1 x_1 ; \ \rho y_2 = \mu_2 x_2 \cdot \cdot \ \ \rho y_n = \mu_n x_n.$$

Den relative Bevægelses Differentialligninger.

Af **Oluf Kragh**.

---

1. Som bekendt gælder den levende Krafts Princip for den relative Bevægelse. Differentialligningerne for denne kan derfor bringes paa den anden Lagrangeske Form, efter at man har indført et System af Koordinater, der identisk tilfredsstiller Betingelsesligningerne.

For at danne dette System af Ligninger faar man Brug for de fictive Kræfters Komposanter efter Akserne i et bevægeligt Koordinatsystem. Er dette $C - XYZ$, og har C i den absolute Bevægelse en Acceleration, hvis Komposanter efter de bevægelige Akser er u, v og w, føjer man til Partiklen med Massen m_i en Kraft med Komposanterne

$$(1) \qquad -m_i u, \quad -m_i v, \quad -m_i w.$$

Medføringsbevægelsen bliver da en Rotation om den instantane Akse L gennem Punktet C. Betegnes den instantane Vinkelhastighed ved $\hat{\omega}$, svarer der hertil paa Partiklen med Massen m_i en Kraft $m_i\hat{\omega}^2\rho$, idet ρ betegner Afstanden fra m_i til L. Man maa altsaa yderligere paa Partiklen tilføje Kraften $-m_i\hat{\omega}^2\rho$.

Dennes Komposanter efter Akserne er

$$-m_i\hat{\omega}^2\rho\cos(X\rho), \quad -m_i\hat{\omega}^2\rho\cos(Y\rho), \quad -m_i\hat{\omega}^2\rho\cos(Z\rho).$$

Betegnes ved p Massepartiklens Afstand fra C og ved $\hat{\omega}_x$, $\hat{\omega}_y$, $\hat{\omega}_z$ den instantane Rotations Komposanter efter Akserne, faar man

$$\rho\cos(X\rho) = -x_i + p\cdot\frac{x_i\hat{\omega}_x + y_i\hat{\omega}_y + z_i\hat{\omega}_z}{p\hat{\omega}}\cdot\frac{\hat{\omega}_x}{\hat{\omega}}$$

$$= -x_i + \frac{\hat{\omega}_x}{\hat{\omega}^2}\cdot(x_i\hat{\omega}_x + y_i\hat{\omega}_y + z_i\hat{\omega}_z),$$

og tilsvarende Udtryk for $\rho \cos(Y\rho)$ og $\rho \cos(Z\rho)$. For de tre ovenstaaende Komposanter faar man altsaa

(2) $$m_i \hat{\omega}^2 x_i - m_i \hat{\omega}_x (x_i \hat{\omega}_x + y_i \hat{\omega}_y + z_i \hat{\omega}_z)$$

og de to analoge.

For endelig at danne den til den sammensatte Centrifugalkraft svarende fictive Kraft beregnes denne for hver af Rotationens Komposanter for sig, anvendt paa den relative Hastigheds Komposanter

$$\frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{dy_i}{dt} \text{ og } \frac{dz_i}{dt}.$$

Man faar følgende:

(3) $$2m_i \left(\hat{\omega}_z \frac{dy_i}{dt} - \hat{\omega}_y \frac{dz_i}{dt} \right)$$

og de to analoge.

2. Er Systemet underkastet en vis Tvang, angivet ved Ligningerne

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots, \quad L_k = 0,$$

kan man nu umiddelbart opskrive den relative Bevægelses Differentialligninger paa den første Lagrangeske Form.

Indfører man de nye Koordinater $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, der antages identisk at tilfredsstille Betingelsesligningerne, i Stedet for

$$x_i, y_i, z_i \ (i = 1, 2, \ldots, n, \ \mu = 3n - k),$$

kommer man til den anden Lagrangeske Form for Bevægelsens Differentialligninger, idet man udtrykker det elementære Arbejde i disse Koordinater, der som bekendt lader sig indføre paa uendelig mange Maader.

Har de paa Massepartiklerne virkende ydre Kræfter Komposanterne $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\mu$ efter $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, kan det fra de ydre Kræfter hidrørende elementære Arbejde skrives

(4) $$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \cdots + Q_\mu dq_\mu,$$

medens det elementære Arbejde, der udføres af Kraften med Komposanterne (1), er

(5) $$-\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} dq_\nu \sum_1^n m_i \left(u \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + v \frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} + w \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} \right).$$

For at beregne det elementære Arbejde, hidrørende fra Kraften med Komposanterne (2), skrives disse paa Formen

$$m_i \hat{\omega}_y (x_i \hat{\omega}_y - y_i \hat{\omega}_x) + m_i \hat{\omega}_z (x_i \hat{\omega}_z - z_i \hat{\omega}_x)$$

og de analoge, idet $\hat{\omega}$ elimineres ved Hjælp af Ligningen

$$\hat{\omega}^2 = \hat{\omega}_x^2 + \hat{\omega}_y^2 + \hat{\omega}_z^2.$$

Det elementære Arbejde kan da efter en simpel Udregning skrives paa Formen

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \Bigg\{ \sum_{1}^{n} m_i \Bigg[&(x_i \hat{\omega}_y - y_i \hat{\omega}_x) \left(\hat{\omega}_y \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} - \hat{\omega}_x \frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} \right) \\ &+ (y_i \hat{\omega}_z - z_i \hat{\omega}_y) \left(\hat{\omega}_z \frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} - \hat{\omega}_y \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} \right) \\ &+ (z_i \hat{\omega}_x - x_i \hat{\omega}_z) \left(\hat{\omega}_x \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} - \hat{\omega}_z \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \right) \Bigg] \Bigg\} dq_\nu . \end{aligned} \right.$$

(3) og dens analoge udfører det elementære Arbejde

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \Bigg\{ \sum_{1}^{n} 2m_i \Bigg[&\left(\hat{\omega}_z \frac{dy_i}{dt} - \hat{\omega}_y \frac{dz_i}{dt} \right) \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} + \left(\hat{\omega}_x \frac{dz_i}{dt} - \hat{\omega}_z \frac{dx_i}{dt} \right) \frac{\partial y_i}{\partial q_\nu} \\ &+ \left(\hat{\omega}_y \frac{dx_i}{dt} - \hat{\omega}_x \frac{dy_i}{dt} \right) \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} \Bigg] \Bigg\} dq_\nu . \end{aligned} \right.$$

Dette fra den sammensatte Centrifugalkraft hidrørende elementære Arbejde er som bekendt Nul. Dette ses imidlertid ogsaa let uden at tage synthetiske Betragtninger til Hjælp. Ti sættes i den kantede Parentes i (7) f. eks. $\hat{\omega}_y$ udenfor Parentes, faar man som Faktor til $\hat{\omega}_y$

$$\frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} \cdot \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \cdot \frac{dz_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu} \left[\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} - \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_\lambda} \right] q'_\lambda ,$$

idet λ dog ikke kan være lig ν. Men da q-Koordinaterne identisk tilfredsstiller Betingelsesligningerne, saa er Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_\nu} - \frac{\partial x_i}{\partial q_\nu} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_\lambda} = 0.$$

Indfører vi Betegnelserne

$$K = - \sum_{1}^{n} m_i (u x_i + v y_i + w z_i)$$

og

$$G = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} m_i \left[(x_i\hat{\omega}_y - y_i\hat{\omega}_x)^2 + (y_i\hat{\omega}_z - z_i\hat{\omega}_y)^2 + (z_i\hat{\omega}_x - x_i\hat{\omega}_z)^2\right],$$

kan Udtrykkene i (5) og (6) skrives

$$\sum_{1}^{\mu} \frac{\partial K}{\partial q_\nu} dq_\nu, \quad \sum_{1}^{\mu} \frac{\partial G}{\partial q_\nu} dq_\nu.$$

Den levende Kraft i den relative Bevægelse er

$$T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right].$$

Da Betingelsesligningerne er identisk tilfredsstillet, er

$$dq_1,\ dq_2,\ \ldots,\ dq_\mu$$

uafhængige af hinanden. T er homogen af anden Orden med Hensyn til $\frac{dq_\nu}{dt} = q'_\nu$. Benytter man nu den levende Krafts Princip ganske paa samme Maade som ved Udledelsen af den absolute Bevægelses Ligninger paa Lagranges Form, faar man til Bestemmelse af den relative Bevægelse følgende System af Differentialligninger

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = Q_\nu + \frac{\partial (K + G)}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \mu.$$

3. En mere bekvem Form faar disse Ligninger, naar man indfører Udtrykket

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} T_1 = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} \Bigg\{ & \left[\frac{dx_i}{dt} - (y_i\hat{\omega}_z - z_i\hat{\omega}_y)\right]^2 + \left[\frac{dy_i}{dt} - (z_i\hat{\omega}_x - x_i\hat{\omega}_z)\right]^2 \\ & + \left[\frac{dz_i}{dt} - (x_i\hat{\omega}_y - y_i\hat{\omega}_x)\right]^2 \Bigg\}, \end{aligned} \right.$$

hvoraf

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} T = T_1 + \sum_{1}^{n} m_i \Bigg[& (y_i\hat{\omega}_z - z_i\hat{\omega}_y)\frac{dx_i}{dt} + (z_i\hat{\omega}_x - x_i\hat{\omega}_z)\frac{dy_i}{dt} \\ & + (x_i\hat{\omega}_y - y_i\hat{\omega}_x)\frac{dz_i}{dt}\Bigg] - G. \end{aligned} \right.$$

Da

$$\frac{\partial}{\partial q'_\nu}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)=\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu},\quad \frac{\partial}{\partial q'_\nu}\left(\frac{dy_i}{dt}\right)=\frac{\partial y_i}{\partial q_\nu},\quad \frac{\partial}{\partial q'_\nu}\left(\frac{dz_i}{dt}\right)=\frac{\partial z_i}{dq_\nu},$$

og da G ikke indeholder q'_ν, faas ved Differentiation af (10)

$$\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}=\frac{\partial T_1}{\partial q'_\nu}+\sum_1^n m_i\left[(y_i\hat{\omega}_z-z_i\hat{\omega}_y)\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}+(z_i\hat{\omega}_x-x_i\hat{\omega}_z)\frac{\partial y_i}{\partial q_\nu}\right.$$
$$\left.+(x_i\hat{\omega}_y-y_i\hat{\omega}_x)\frac{\partial z_i}{\partial q_\nu}\right].$$

Erindres det nu, at Koefficienten til $2m_i$ i (7) er Nul, faar man atter heraf:

$$(11)\quad\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial q'_\nu}\right)+\displaystyle\sum_1^n m_i\left[(y_i\hat{\omega}_z-z_i\hat{\omega}_y)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\right)\right.\\ \left.\quad+(z_i\hat{\omega}_x-x_i\hat{\omega}_z)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial q_\nu}\right)+(x_i\hat{\omega}_y-y_i\hat{\omega}_x)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial z_i}{\partial q_\nu}\right)\right],\end{cases}$$

samt ved Differentiation af (10) med Hensyn til q_ν:

$$(12)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial q_\nu}=\dfrac{\partial T_1}{\partial q_\nu}+\displaystyle\sum_1^n m_i\left[(y_i\hat{\omega}_z-z_i\hat{\omega}_y)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\right)+(z_i\hat{\omega}_x-x_i\hat{\omega}_z)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial q_\nu}\right)\right.\\ \left.\quad+(x_i\hat{\omega}_y-y_i\hat{\omega}_x)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial z_i}{\partial q_\nu}\right)\right]-\dfrac{\partial G}{\partial q_\nu},\end{cases}$$

idet man let indser Rigtigheden af $\frac{\partial}{\partial q_\nu}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\nu}\right)$ og de analoge.

Indsættes de i (11) og (12) fundne Udtryk i (8), antager disse Ligninger Formen:

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_\nu}\right)-\frac{\partial T_1}{\partial q_\nu}=Q_\nu+\frac{\partial K}{\partial q_\nu},\quad \nu=1,2,\ldots,\mu,$$

der ganske svarer til den anden Lagrangeske Form for Differentialligningerne for den absolute Bevægelse.

4. Vil man bringe Bevægelsens Differentialligninger paa den Hamiltonske Form ved Hjælp af Poissons Transformation, er (8) lettest at benytte; ti T_1 er ikke homogen med Hensyn til $q'_1, q'_2, \ldots, q'_\mu$.

Sættes $\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}=p_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,\mu$, føres man paa ganske samme Maade som ved Ligningerne for den absolute Bevægelse til Formen:

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{dp_\nu}{dt} = Q_\nu + \dfrac{\partial (K + G - T)}{\partial q_\nu} \\ \dfrac{dq_\nu}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial p_\nu} \end{cases} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \mu.$$

Da hverken K eller G indeholder p, antager Ligningen til Bestemmelse af den Eulerske Faktor M for Systemet (14)

$$\frac{d \log M}{dt} + \sum_1^\mu \frac{\partial \dfrac{\partial T}{\partial p_\nu}}{\partial q_\nu} + \sum_1^\mu \frac{\partial \left[Q_\nu + \dfrac{\partial (K + G - T)}{\partial q_\nu} \right]}{\partial p_\nu} = 0$$

den simple Form

$$\frac{d \log M}{dt} = 0, \text{ altsaa } M = \text{konstant}.$$

Den relative Bevægelses Ligninger har altsaa denne Egenskab fælles med Ligningerne for den absolute Bevægelse.

Det forudsættes naturligvis herved, at de ydre Kræfter kun afhænger af Koordinater og Tid, ikke af Hastigheder.

Bevis for de Cantorske Talklassers Eksistens.

Af **Johannes Mollerup**.

I et Par tidligere Arbejder (Die Definition des Mengenbegriffs, Math. Ann. Bd. 64, 231, 1907 og Sur la théorie des ensembles et le concept du nombre, Videnskabernes Selskabs Oversigter 1907) har jeg undersøgt Betingelsen for at alle Elementer, der tilfredsstiller et vist System af Sætninger, kan siges at danne en Mængde. Dette er ikke Tilfældet, naar enhver Mængde, hvis Elementer tilfredsstiller Sætningerne, er Undermængde i en anden Mængde, hvis Elementer ogsaa tilfredsstiller Sætningerne. I dette Tilfælde er Sætningssystemet ufuldstændigt. De omtalte Sætninger eller Axiomer indeholder Angivelse af, hvorledes man af visse givne Elementer (f. Eks. 0 og 1) konstruerer nye Elementer. Er nu Sætningssystemet ufuldstændigt, da tilfredsstilles det baade af Elementer, der kan konstrueres, og af andre, saakaldte ideale Elementer. Er Sætningssystemet derimod fuldstændigt, da kan hvert Element, der tilfredsstiller Sætningerne, konstrueres ved Hjælp af dem. Paa denne Maade faar Spørgsmaalet: »Gives der en Mængde af alle Elementer, der tilfredsstiller Sætningerne?« følgende bestemte Betydning: Man antager Eksistensen af et vilkaarligt Element, der tilfredsstiller Sætningssystemet, og efterviser da, hvorledes dette Element konstrueres af de givne ved Hjælp af Sætningerne.

Før vi gaar over til at paavise Eksistensen af *G. Cantors* transfinite Talklasser (*G. Cantor*, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 og Math. Ann. 46 og 49), vil vi bevise en Hjælpesætning.

Sætning 1. Naar en aftællelig Mængde er ordnet paa vilkaarlig Maade, da indeholder den enten et sidste

Element eller en sidste Undermængde af Typus ω d. v. s. en Undermængde af Typus ω uden noget efterfølgende Element (sml. *G. Cantor*, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, § 12, S. 35) {en Mængde af Typus ω er ligedannet med Mængden $1\ 2\ 3 \ldots n \ldots$}.

Lad den aftællelige Mængde være

$$M \equiv \{ a_1 a_2 a_3 \ldots \}$$

og den samme Mængde i den i Sætningen omtalte Ordning M'. Vi udtager nu, idet vi antager, at intet Element i M' er det sidste, den søgte Mængde af Typus ω

$$\{ a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} \ldots \}$$

paa følgende Maade: $a_{n_1} \equiv a_1$; a_{n_2} er det første Element i M, der baade i M og M' følger efter a_1; a_{n_3} er det første Element i M, der baade i M og M' følger efter a_{n_2} o. s. v. Hvis der nu i M' findes et Element a_p, der følger efter hele den fundne Mængde

$$\{ a_{n_1} a_{n_2} \ldots \},$$

da har man f. Eks.

$$n_q < p < n_{q+1};$$

men dette er en Modstrid, idet $a_{n_{q+1}}$ da ikke kan være det første Element i M efter a_{n_q}, der ogsaa i M' følger efter a_{n_q}. Hermed er Sætningen bevist — Specielt kan Ordningen gaa over til en Velordning. (En ordnet Mængde er velordnet, naar enhver Undermængde har et første Element; enhver Undermængde af en velordnet Mængde, som indeholder alle de første Elementer, kaldes et Afsnit).

Geometrisk Anvendelse.

ACB og AC_1B er to complementære Segmenter af en projektiv ret Linje; paa AC_1B ligger en vilkaarlig Punktmængde M. Naar Linjens Kontinuitet er fastslaaet, gælder følgende Sætning: Paa AC_1B findes et Segment $A'B'$, der indeholder hele Mængden M, medens M ikke er indeholdt i nogen Del af $A'B'$.

Kontinuiteten kan bestemmes paa *Dedekind'sk* eller *Cantor'sk* Maner. Da Kongruensbegrebet ikke forudsættes, lyder det *Cantor'ske* Kontinuitetsaxiom her saaledes:

Er den aftællelige Punktmængde $\{ P_1 P_2 P_3 \ldots \}$, hvor stadig P_n ligger mellem P_m og P_r, naar $m < n < r$, indeholdt i et Segment P_1A, da har Punktmængden et Grænsepunkt P, der ogsaa tilhører P_1A, saaledes at hele Mængden inde-

holdes i P_1P og ethvert Segment OP indeholder Punkter af Mængden, naar O tilhører P_1P. (Sml. *Pasch,* Vorlesungen über neuere Geometrie, S. 125). Vi vil nu angive Vejen fra dette Axiom til ovennævnte Sætning. Vi betegner i det følgende den naturlige Rækkefølge af Punkter i en given Omløbsretning ved Tegnet $<$, saaledes i Axiomet

$$P_1 < P_2 < P_3 \ldots . < P \leqq A.$$

Lad nu P_1 være et Punkt af den i Sætningen omtalte Mængde M, $P_1 < A$; ligger der ikke noget Punkt mellem P_1 og A, da er $P_1 = A'$. I modsat Fald findes P_2, hvor $P_1 < P_2 < A$; paa denne Maade fortsættes, og man faar, hvis A' stadig ikke er fundet:

$$P_1 < P_2 < P_3 \ldots . < A.$$

Punktmængden $\{P_1 P_2 P_3 \ldots .\}$ har et Grænsepunkt $P_\omega \leqq A$. Er $P_\omega = A$, da er $A' = P_\omega = A$; er $P_\omega < A$, og har Mængden intet Punkt mellem P_ω og A, da er $A' = P_\omega$. I modsat Fald findes $P_{\omega+1}$, $P_{\omega+2} \ldots$, saa at $P_\omega < P_{\omega+1} < P_{\omega+2} < \ldots . < A$. Findes A' stadig ikke, maa vi fortsætte ved stadig Fordobling af Punktmængden P_ω. Da nu ingen af Intervallerne mellem to Punkter P har Punkter fælles, er Antallet af Intervaller efter en Sætning af *G. Cantor* aftælleligt (Acta Math. *2*, 376, 1883); det samme gælder altsaa Punktmængden P. Men efter Sætning (1) maa denne Mængde da enten have et sidste Element eller en sidste Mængde af Typus ω; dette sidste Element eller Grænsepunktet for denne sidste Mængde af Typus ω er Punktet A'. Paa samme Maade konstrueres B'.

I *Zeuthen—Lüroths* Bevis for Projektivgeometriens Hovedsætning (Math. Ann. *7*, 1874) er den givne Mængde M en harmonisk Punktmængde, der opstaar af 3 givne Punkter ved fortsat Konstruktion af det 4de harmoniske; ACB er et Segment, hvori denne Mængde tænkes ikke at trænge ind (det skal bevises, at Mængden trænger ind i ethvert Interval). Det *Zeuthenske* Bevis begynder netop med at udvide Segmentet ACB til Punkterne A' og B', Mængden M's øvre og nedre Grænse. Da den harmoniske Punktmængde er aftællelig, findes A' og B' her ogsaa umiddelbart ved Sætning 1.

Sætning 2. De nødvendige og tilstrækkelige Betingelser for at en ordnet, aftællelig Mængde er velordnet, er at

1⁰. Mængden har et første Element,

2⁰. ethvert Element, eventuelt med Undtagelse af et sidste, har et umiddelbart efterfølgende,

3^0. *enhver Undermængde med Typus* ω, *eventuelt med Undtagelse af en sidste, har et umiddelbart efterfølgende Element.*

a) Betingelserne er *nødvendige*; thi lad Mængden være $M = (a_1 a_2 a_3 \dots)$ og a_n et givet Element. Enten er a_n større end alle andre Elementer i M eller ogsaa danner de Elementer, der er $> a_n$, (Ordet »større« og Tegnet $>$ angaar den i Sætningen omtalte Ordning) en aftællelig eller endelig Mængde, der i den givne Ordning maa have et første Element, der følger umiddelbart efter a_n. Er $M_1 = (a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} \dots)$ en Undermængde med Typus ω, vil M_1 enten være en sidste saadan Undermængde, eller ogsaa danner de Elementer, der er $>$ alle Elementer i M_1, en endelig eller aftællelig Mængde med et første Element, der netop er det søgte. At 1^0 er nødvendig, er indlysende.

b) Betingelserne er *tilstrækkelige*; thi er M_1 en Undermængde af $M = (a_1 a_2 a_3 \dots)$, $M_1 = (a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} \dots)$, som ikke indeholder M's første Element, da dannes der en Undermængde af M, $M_2 = (a_{p_1} a_{p_2} a_{p_3} \dots)$, bestaaende af alle Elementer $<$ samtlige Elementer i M_1. M_2 er endelig eller aftællelig og har altsaa i den givne Ordning et sidste Element eller en sidste Undermængde af Typus ω. Herefter følger umiddelbart et Element, der er det søgte første Element i M_1.

Sætning 3. Kontinuet indeholder en velordnet ikke aftællelig Undermængde, hvori hvert Afsnit er aftælleligt.

Denne velordnede Undermængde dannes paa følgende Maade. Vi udtager først af Kontinuet en Mængde M af Typus ω; da Kontinuet ikke er aftælleligt, kan vi lade en anden Mængde M' af Typen ω følge efter den forrige. Efter hele den dannede Mængde følger nu en dermed ligedannet Mængde af nye Elementer; enhver aftællelig Mængde, der dannes paa denne Maade, skal efterfølges af en dermed ligedannet. At denne Fordobling altid er mulig ses derved, at man af Kontinuet kan udtage en ny aftællelig Mængde, der omskrives til en Mængde ligedannet med den forelagte. Spørgsmaalet er nu: opstaar der en bestemt Mængde derved, at man lader enhver aftællelig Mængde efterfølges af en dermed ligedannet? Vi skal altsaa undersøge, om de Egenskaber, der skal definere Mængden, er fuldstændige. Lad α være et Element, der foreløbig antages *idealt* d. v. s. α tilfredsstiller de samme Love som de konstruerede Elementer uden selv at kunne konstrueres. Her benytter vi, at α kan sammenlignes med

andre Elementer m. H. t. Orden (»Størrelse«) og at M_α, Mængden af Elementer $< \alpha$, er aftællelig. M_α kan skrives med Typen ω, $M_\alpha \equiv \{ b_1 b_2 b_3 \dots \}$; heraf dannes nu en Mængde $M_{k\alpha}$ Element for Element ved Overspringning af de eventuelle ideale Elementer. Paa denne Maade skrives $M_{k\alpha}$ med Typen ω. $M_{k\alpha}$ omskrives nu til en Mængde $M'_{k\alpha}$, hvori Ordningen bestemmes efter den oprindelige Ordning i M_α. Da $M'_{k\alpha}$ er aftællelig, har den efter Sætning 1 et sidste Element eller en sidste Undermængde af Typus ω. I begge Tilfælde konstrueres α som det første Element i den med $M'_{k\alpha}$ ligedannede Mængde, der skal følge efter $M'_{k\alpha}$. Der gives altsaa ingen ideale Elementer; hermed er Eksistensen af den søgte Mængde godtgjort.

Den fundne Mængde er velordnet; thi indeholder Undermængden m Elementet a, men ikke det første Element i hele Mængden, da er Mængden af Elementer $< a$ højst aftællelig, altsaa ligeledes Mængden m' af Elementer $<$ alle Undermængdens Elementer. Naar m' nu fordobles, bestemmes det første Element i m.

Den fundne Mængde, *G. Cantors* anden Talklasse, er ikke aftællelig, da den hverken kan have noget sidste Element eller nogen sidste Mængde af Typus ω. Den Egenskab, at Mængden af Elementer $<$ et givet Element er aftællelig, kaldes af *Cantor* et Hemmingsprincip (Grundl. einer allg. Mannigfaltigkeitslehre, S. 33—34); dette Hemmingsprincip viser sig altsaa at spille Fuldstændighedssætningens Rolle.

Efter *G. Cantor* begynder man med Mængden af hele positive Tal og 0:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \dots;$$

den dermed ligedannede Mængde kaldes

$$\omega, \ \omega + 1, \ \omega + 2, \ \omega + 3 \dots.$$

Derefter kommer

$$\omega \cdot 2, \ \omega \cdot 2 + 1, \ \dots, \ \omega \cdot 3, \ \omega \cdot 3 + 1, \ \dots.$$

Mængden

$$0 \quad 1 \quad 2 \dots \omega \dots \omega \cdot 2 \dots \omega \cdot 3 \dots$$

fordobles ved

$$\omega^2, \ \omega^2 + 1, \ \omega^2 + 2 \dots \text{o. s. fr.}$$

Man behøver nu ikke at opfatte disse Tal som reelle Tal, men kan som *Cantor* opfatte hvert af dem som en Ordningstype for den aftællelige Mængde af de foregaaende Tal. Hele Mængden siges at have Typen Ω og Mægtigheden $\aleph_1$, medens den aftællelige Mængde har Mægtigheden $\aleph_0$.

Følgesætning. Ethvert Tal i anden Talklasse har enten et umiddelbart foregaaende Tal eller en umiddelbart

foregaaende Mængde af Typus ω (for hvilken Tallet kan kaldes Grænsetal).

Sætning 4 (Sætningen om den fuldstændige Induktion i anden Talklasse). Hvis en Sætning omtaler et vilkaarligt Tal af første eller anden Talklasse, og denne Sætning er rigtig for $m + 1$, hvis den er rigtig for m, og den endvidere er rigtig for l, hvis den er rigtig for en Mængde af Typen ω, der gaar umiddelbart forud for l, da er Sætningen rigtig for alle Værdier af m fra første og anden Talklasse $> n$, saafremt Sætningen er rigtig for $m = n$.

Lad nemlig Sætningen være falsk for Tallet $\alpha > n$; af de Tal mellem n og α, for hvilke Sætningen er falsk, er et, β, det første (β konstrueres let, da Mængden af Tal mellem n og α er endelig eller aftællelig). Nu er Mængden af Tal mellem n og β atter endelig eller aftællelig og har altsaa et sidste Element eller en sidste Mængde af Typen ω, for hvilket Element eller for hvilken Mængde Sætningen altsaa maatte være rigtig. Men da maatte den efter Forudsætningen ogsaa være rigtig for β, hvilket giver en Modstrid.

Sætning 5. Er $M \equiv \{ b_{n_1} b_{n_2} b_{n_3} \ldots \}$ en velordnet Mængde, idet $(n_1 n_2 n_3 \ldots)$ tilhører anden Talklasse og i denne $n_1 > n_2 > n_3 \ldots$, da er Mængden M endelig.

Thi $\{ n_1 n_2 n_3 \ldots \}$ maa som Undermængde i anden Talklasse have et første Element; er dette n_p, da indeholder M kun de p Elementer $b_{n_1} b_{n_2} \ldots b_{n_p}$.

Sætning 6. Er $M \equiv \{ a_1 a_2 a_3 \ldots a_\omega \ldots a_\gamma \ldots \}$ en Mængde med Mægtighed $\aleph_1$ og Typus Ω, og er der forelagt en definit Egenskab d. v. s. ethvert Element har denne Egenskab eller ikke, da danner de Elementer, der har denne Egenskab, en Undermængde, der kan være endelig eller aftællelig eller have Mægtigheden $\aleph_1$.

Hvis hvert Element, der har den omtalte Egenskab, gaar forud for et vist Element a_γ, da konstrueres den søgte Mængde let som Undermængde i den aftællelige Mængde, hvis Elementer er $< a_\gamma$. Vi antager derfor, at der i hele den sidste Del af Mængden M findes Elementer med den omtalte Egenskab. Den søgte Mængde konstrueres da paa følgende Maade. Lad a_γ være et Element, der har den givne Egenskab; de Elementer $\leq a_\gamma$, der har den givne Egenskab,

danner en bestemt Mængde, der skal fortsættes. For at finde det Element, der følger umiddelbart efter a_γ, finder man blot et senere Element a_β med denne Egenskab; mellem a_γ og a_β ligger da højst en aftællelig Mængde med denne Egenskab, hvis første Element let findes. For at den søgte Mængde skal være bestemt, maa man imidlertid ogsaa vide, hvorledes et vilkaarligt Afsnit af den fortsættes, naar det ikke har noget sidste Element; i dette Tilfælde har Afsnittet en sidste Undermængde af Typus ω. Efter denne følger i M nye Elementer og altsaa ogsaa efter Forudsætningen nye Elementer med den omtalte Egenskab; det første af disse findes da ligesom før. Herved er da den søgte Mængde konstrueret, ligedannet med anden Talklasse; i dette Tilfælde har den altsaa Mægtigheden $\aleph_1$.

Sætning 7. En ordnet (spec. velordnet) Mængde af den anden Talklasses Mægtighed ($\aleph_1$) har enten et sidste Element eller en sidste Mængde af Typus ω eller en sidste Mængde af Typus Ω.

Lad Mængden være

$$M \equiv \{a_1 a_2 \ldots . a_\omega \ldots . a_\gamma \ldots .\},$$

hvor Indices gennemløber anden Talklasse, og den samme Mængde i Sætningens Ordning M'. Vi udtager $a_{n_1} = a_1$, dernæst a_{n_2}, som er det første Element efter a_1, der ogsaa i M' følger efter a_1, dernæst a_{n_3}, som er det første Element efter a_{n_2}, der ogsaa i M' følger efter a_{n_2} o. s. v. Hvis M' ikke indeholder noget sidste Element og heller ikke nogen sidste Mængde af Typus ω, da efterfølges Mængden

$$\{a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} \ldots .\}$$

af et Element, som er det første, der baade i M og M' følger efter alle Elementerne $(a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3} \ldots .)$. Ved fortsat Fordobling bestemmes en Mængde med Mægtighed $\aleph_1$

$$\{a_{n_1} a_{n_2} \ldots . a_{n_\omega} \ldots . a_{n_\gamma} \ldots .\}.$$

Efter denne Mængde følger i M' intet Element; thi lad a_p følge efter denne Mængde, idet p er et Tal i anden Talklasse. Tallene

$$n_1 n_2 \ldots . n_\omega \ldots . n_\gamma \ldots .$$

er ikke alle $< p$. Mængden af disse Tal $< p$ er aftællelig eller endelig og har altsaa et sidste Element $n_{\gamma-1}$ eller en sidste Mængde med Typus ω $\{n_{\gamma_1} n_{\gamma_2} n_{\gamma_3} \ldots .\}$. Er n_γ i første Tilfælde det Element, der i Mængden $\{n_1 n_2 \ldots . n_\omega \ldots . n_\gamma \ldots .\}$ følger umiddelbart efter $n_{\gamma-1}$

og i andet Tilfælde det Element, der følger umiddelbart efter $\{n_{\gamma_1} n_{\gamma_2} \ldots\}$, da skulde i begge Tilfælde a_p være valgt i Stedet for a_{n_γ}. Der er altsaa udledt en Modstrid.

Sætning 8. De nødvendige og tilstrækkelige Betingelser for, at en ordnet Mængde af Mægtighed $\aleph_1$ er velordnet er at

1⁰ Mængden har et første Element

2⁰ ethvert Element, eventuelt med Undtagelse af et sidste, har et umiddelbart efterfølgende

3⁰ enhver Undermængde med Typus ω, eventuelt med Undtagelse af en sidste, har et umiddelbart efterfølgende Element

4⁰ enhver Undermængde med Typus Ω, eventuelt med Undtagelse af en sidste, har et umiddelbart efterfølgende Element.

Beviset føres som i Sætning 2.

For at bevise Eksistensen af de følgende Talklasser, har vi Brug for følgende Hypothese:

Naar der er givet en vis velordnet Mængde med lutter forskellige Elementer, da eksisterer der altid en dermed ligedannet Mængde af lutter nye indbyrdes forskellige Elementer.

Definition. En velordnet Mængde med Mægtighed $\aleph_2$ og den simpleste Typus dannes ved Fordoblingsprincippet, idet ethvert Afsnit er endeligt eller aftælleligt eller af Mægtigheden $\aleph_1$.

Paa samme Maade dannes de følgende Mægtigheder $\aleph_3 \aleph_4 \ldots \aleph_n \ldots$ I en Mængde med Mægtighed $\aleph_n$ og simpleste Typus har ethvert uendeligt Afsnit en af Mægtighederne $\aleph_0 \aleph_1 \ldots \aleph_{n-1}$.

Antager vi Eksistensen af Mængder med Mægtighederne $\aleph_2 \aleph_3 \ldots \aleph_{n-1}$, da beviser man ogsaa let de tilsvarende Sætninger til Sætningerne 4—8 for disse Mængder. Vi fordobler nu den sidste Mængde og ligeledes enhver Mængde med Mægtighed $\aleph_{n-1}$; derved opstaar en Mængde med Mægtighed $\aleph_n$. Lad nemlig α være et Element, der foreløbig antages idealt; M_α, Mængden af Elementer $< \alpha$, har da en af de foregaaende Mægtigheder, f. Eks. $\aleph_p$, $p < n$, og kan

skrives med den simpleste Typus. Heraf dannes nu ved Overspringning af eventuelle ideale Elementer Mængden af konstruerede Elementer $< \alpha$ (Sætn. 6), der atter ordnes i den oprindelige Orden som en Mængde M', der højst har Mægtigheden $\aleph_p$. M' indeholder da et sidste Element eller en sidste Undermængde med en af Mægtighederne $\aleph_0\ \aleph_1 \ldots \aleph_p$ (Sætn. 7). Umiddelbart efter denne Undermængde følger nu α, der altsaa ikke kan være et idealt Element.

Hermed er altsaa under Antagelse af Hypothesen S. 113 bevist Eksistensen af Mægtighederne $\aleph_2\ \aleph_3 \ldots \aleph_n \ldots$. Grunden til Nødvendigheden af at antage denne Hypothese er den, at medens det er bevist, at Kontinuet ikke er aftælleligt, er det ikke bevist, et Kontinuet ikke har Mægtigheden $\aleph_1$; derfor kan man til Dannelsen af nye Mægtigheder ikke benytte de reelle Tal, hvis Eksistens og Forskellighed er givet paa Forhaand. Den Cantorske Opfattelse er den, at selve Ordningstypen for en vis konstrueret Mængde er et nyt Element, der kan føjes til; det er klart, at denne Opfattelse ikke gør Hypothesen overflødig.

Definition. En Mængde med Mægtighed $\aleph_\omega$ opstaar ved Anvendelse af Fordoblingsprincipet saaledes, at ethvert Afsnit har en Mægtighed $\aleph_n$, hvor n er et eller andet endeligt Tal.

Mængdens Eksistens eftervises saaledes:

Er α et Element, der eventuelt er idealt, da har Mængden af Elementer $< \alpha$ en Mægtighed $\aleph_n$; naar denne skrives med den simpleste Typus findes Mængden af konstruerede Elementer $< \alpha$ ved Sætning 6. Denne Mængde har enten et sidste Element eller en sidste Undermængde med en bekendt Typus (Sætning 7); umiddelbart efter dette sidste Element eller efter denne sidste Undermængde følger α, der altsaa ikke er et idealt Element.

Sætning 9. Er γ en vilkaarlig Ordningstype, da eksisterer der en Mængde med Mægtighed $\aleph_\gamma$, hvori ethvert uendeligt Afsnit har en lavere Mægtighed $\aleph_\beta$, $\beta < \gamma$.

Er δ et eventuelt idealt Element, da findes Mængden af konstruerede Elementer $< \delta$ som i det foregaaende; den har efter Sætning 7 et sidste Element eller en sidste Undermængde med bekendt Typus. δ er da det umiddelbart efterfølgende Element.

Bidrag til en almindelig teori for de af Franz Neumann angivne rækkeudviklinger efter kuglefunktioner af anden art.

Af **Niels Nielsen.**

§ 1. Om en uendelig samling af rækkeudviklinger for analytiske funktioner.

Lad Ω være et i x-planen beliggende arealkontinuum, der indeholder denne plans nulpunkt O, og hvis begrænsningskurve K ikke skærer nogensomhelst gennem O gaaende ret linie i mere end to punkter. Desuden maa nedre grænse g for den af de absolute værdier af radii vektorerne fra O til punkterne paa K dannede talmængde med positive elementer ikke være nul.

I kontinuet Ω definerer vi en uendelig følge af funktioner

$$(1) \qquad F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots,$$

der alle skal være analytiske i Ω, og det saaledes, at $F_n(x)$ i $x = 0$ har et nulpunkt af netop n^{te} orden. Da alle funktionerne (1) er analytiske i det indre af cirklen $|x| = g$, haves for ethvert n en potensrække af formen

$$(2) \qquad F_n(x) = b_{n,0}x^n + b_{n,1}x^{n+1} + \cdots + b_{n,r}x^{n+r} + \cdots,$$

hvor altsaa for alle n

$$(3) \qquad b_{n,0} \neq 0,$$

medens ingen af potensrækkerne (2) kan have sin konvergensradius mindre end ovennævnte nedre grænse g.

Endvidere forudsætter vi, at den uendelige række

$$(4) \qquad f(x) = A_0F_0(x) + A_1F_1(x) + \cdots + A_nF_n(x) + \cdots,$$

hvis koefficienter alle er uafhængige af x, er ligelig konvergent i Ω. Ifølge en fundamentalsætning af *Weierstrass**) er denne rækkes sum $f(x)$ en i Ω analytisk funktion af x og kan derfor i omegnen af punktet $x = 0$ udvikles i potensrækken

$$(5) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

hvis konvergensradius i hvert fald ikke kan være mindre end g.

Ifølge den samme sætning af *Weierstrass* haves for ethvert n:

$$(6) \qquad a_n = b_{0,n} A_0 + b_{1,n-1} A_1 + \cdots + b_{n,0} A_n.$$

Tænker man sig omvendt funktionen $f(x)$ opgivet, og er en udvikling af formen (4) og med de lige nævnte egenskaber mulig, kan man, ifølge (3), af (6) sukcessivt bestemme enhver af koefficienterne A_n ved potensrækken (5); vi sætter

$$(7) \qquad A_n = \alpha_{0,n} a_0 + \alpha_{1,n} a_1 + \cdots + \alpha_{n,n} a_n.$$

Da denne bestemmelse af A_n er entydig, kan rækkeudviklingen (4), hvis den overhovedet er mulig, kun foretages paa en eneste maade.

Ved anvendelse af (6) og (7) vil vi nu bevise følgende fundamentalsætning:

I. Betegner

$$(8) \qquad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

en uendelig talfølge, af hvis elementer intet er 0, og definerer vi en uendelig følge af funktioner

$$(9) \qquad G_0(x), \; G_1(x), \; G_2(x), \ldots, G_n(x), \ldots$$

saaledes, at for alle n, i omegnen af $x = 0$,

$$(10) \qquad G_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} b_{n,r} \varphi_{n,r} x^{n+r},$$

og eksisterer der endelig for punktrækken (5) en udvikling af formen

$$(11) \qquad f(x) = B_0 G_0(x) + B_1 G_1(x) + \cdots + B_n G_n(x) + \cdots$$

med samme egenskaber som (4), dannes koefficienterne B_n af udtrykket (7) for A_n, idet man istedetfor a_r sætter $a_r : \varphi_r$; altsaa haves

---

*) Se f. eks. min *Lærebog i elementær funktionsteori*, p. 286.

$$(12) \qquad B_n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{\alpha_{r,n} a_r}{\varphi_r}.$$

For rækkeudviklingen (11) maa nemlig (6) erstattes med følgende

$$(13) \qquad a_n = \sum_{r=0}^{r=n} b_{r,n-r} \varphi_n B_r.$$

Af (13) findes umiddelbart den speciellere sætning:

II. Haves i omegnen af $x = 0$ en udvikling af formen

$$(14) \qquad f_1(x) = a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 x + a_2 \varphi_2 x^2 + \cdots,$$

og kan funktionen $f_1(x)$ udvikles i en række af formen (11), (med de ovennævnte egenskaber), bliver denne rækkes koefficienter de samme som i rækkeudviklingen (4) for $f(x)$.

Den næsten umiddelbart indlysende sætning I er fundamental for rækkeudviklinger af den betragtede type; ti næsten alle kendte rækkeudviklinger af denne art kan, ved anvendelse af I, udledes ved de elementæreste midler.

Cauchys multiplikationsregel for potensrækker giver f. eks. umiddelbart formlen

$$e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n = e^{-x} f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n,$$

hvor vi for ethvert n har

$$(15) \qquad A_n = \frac{a_n}{0!} - \frac{a_{n-1}}{1!} + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{n!};$$

derved erholdes rækkeudviklingen

$$(16) \qquad f(x) = A_0 e^x + A_1 x e^x + \cdots + A_n x^n e^x + \cdots,$$

hvortil altsaa svarer

$$(17) \qquad F_n(x) = x^n e^x, \quad b_{n,r} = \frac{1}{r!},$$

medens kontinuet Ω er det indre af konvergenscirklen for den givne potensrække.

Anvendes nu sætningen I, idet man sætter

$$\varphi_{n+r} = (-1)^r r! \binom{-\nu - n}{r} = \frac{\Gamma(\nu + n + r)}{\Gamma(\nu + n)},$$

faas ved (15) for den samme funktion $f(x)$ den ny rækkeudvikling

$$(18) \quad \begin{cases} f(x) = B_0 (1 - x)^{-\nu} + B_1 x (1 - x)^{-\nu - 1} + \cdots \\ \qquad + B_n x^n (1 - x)^{-\nu - n} + \cdots, \end{cases}$$

hvor vi almindelig har sat

$$(19) \qquad B_n = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r \binom{\nu + n - 1}{r} a_{n-r}.$$

Bestemmelsen af det til (18) svarende kontinuum Ω kan ske ved anvendelsen af simple metoder, som vi imidlertid ikke her kan gaa nærmere ind paa.

§ 2. Undersøgelse af en speciel rækketransformation.

Haves f. eks. for alle n

$$(1) \qquad \varphi_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\, dt,$$

hvor ω er en given funktion, kan man undertiden, idet rækkeudviklingen § 1, (4) forudsættes eksisterende og havende ovennævnte egenskaber, baade bevise eksistensen af rækkeudviklingen § 1, (11) og tillige bestemme i hvert fald det omraade, hvor denne række er ligelig konvergent.

Antages § 1, (4) anvendelig for enhver potensrække med konvergensradius r, idet Ω alene afhænger af r, haves sætningen:

III. Hvis ingen af de $2p$ endelige parametre

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_p \end{matrix}$$

er 0 eller negativ hel, og vi almindelig sætter

$$(1) \qquad \varphi_n = \frac{\Gamma(\alpha_1 + n)\, \Gamma(\alpha_2 + n) \cdots \Gamma(\alpha_p + n)}{\Gamma(\beta_1 + n)\, \Gamma(\beta_2 + n) \cdots \Gamma(\beta_p + n)},$$

er den til § 1, (11) svarende rækkeudvikling mulig, og omraadet for den saaledes erholdte rækkes ligelige konvergens er det oprindelige kontinuum Ω.

For at gennemføre det fuldstændige induktionsbevis for denne sætning, vil det aabenbart være tilstrækkeligt at betragte tilfældet $p = 1$, altsaa vise, hvorledes den givne rækkeudvikling § 1, (4) kan føres over i rækken § 1, (11), idet vi almindelig sætter

$$G_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n + r)\, b_{n,r}}{\Gamma(\beta + n + r)} x^{n+r}. \tag{2}$$

Da α og β begge skal antages endelige, er det muligt at bestemme to hele, ikke negative tal m og q, saaledes at

$$\Re(\alpha) > -m + 1, \quad \Re(\beta - \alpha) > -q + 1; \tag{3}$$

tillige sætter vi

$$f_1(x) = \sum_{n=m}^{n=\infty} a_n x^n = f(x) - \sum_{n=0}^{n=m-1} a_n x^n.$$

og for $n < m$

$$\Phi_n(x) = b_{n,m-n} x^m + b_{n,m-n+1} x^{m+1} + \cdots$$

Derved erholdes af § 1, (4) den ny rækkeudvikling

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{n=m-1} A_n \Phi_n(x) + \sum_{n=m}^{n=\infty} A_n F_n(x); \tag{4}$$

ti denne rækkeudvikling er simpelthen dannet af den foregaaende, idet vi af denne paa begge sider af lighedstegnet har borttaget alle potenser af x lavere end den m^{te}.

Lader vi dernæst t betegne en reel variabel, saaledes at $0 \leqq t \leqq 1$, faas af (4)

$$\left\{ \begin{aligned} f_1(tx)\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1} &= \sum_{n=0}^{n=m-1} A_n \Phi_n(tx)\, t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1} + \\ &+ \sum_{n=m}^{n=\infty} A_n F_n(tx)^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha+q-1}; \end{aligned} \right. \tag{5}$$

da nu ifølge (3)

$$\Re(\alpha + m - 1) > 0, \quad \Re(\beta - \alpha + q - 1) > 0,$$

viser man let, at rækken paa højre side i (5), idet x tilhører Ω, og $0 \leqq t \leqq 1$, er ligelig konvergent i t; denne række tør derfor integreres

ledvis med hensyn til t fra $t = 0$ til $t = 1$, og den saaledes erholdte række er paany ligelig konvergent med hensyn til x, naar x blot tilhører Ω.

Anvendes det *Eulerske* integral af første art

$$\int_0^1 t^{\alpha + r - 1}(1 - t)^{\beta - \alpha + q - 1} dt = \frac{\Gamma(\alpha + r)\,\Gamma(\beta - \alpha + q)}{\Gamma(\beta + r + q)},$$

haves for $|x| < g$, $n \geqq m$

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 F_n(tx)\, t^{\alpha - 1}(1 - t)^{\beta - \alpha + q - 1} dt = \\ \displaystyle = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n + r)\,\Gamma(\beta - \alpha + q)\, b_{n,r}}{\Gamma(\beta + n + r + q)} x^{n+r}; \end{cases}$$

sættes derfor, for ethvert n,

$$(7) \qquad H_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n + r)\, b_{n,r}}{\Gamma(\beta + n + r + q)} x^{n+r}, \quad |x| < g,$$

haves sikkert for $n \geqq m$ og x tilhørende Ω:

$$H_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha + q)} \int_0^1 F_n(tx)\, t^{\alpha - 1}(1 - t)^{\beta - \alpha + q - 1} dt.$$

Integreres nu (5) med hensyn til t, og tilføjes ifølge § 1, II de manglende potenser af x, erholdes

$$(8) \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n H_n(x),$$

hvor vi for $|x| < g$ har potensrækken

$$g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\beta + n + q)} a_n x^n,$$

hvor rækken paa højre side er ligelig konvergent i Ω. Da endvidere identisk

$$x D_x x^n + \rho x^n = (\rho + n) x^n = x^{1 - \rho} D_x x^{n + \rho},$$

da rækken paa højre side i (8) er ligelig konvergent i Ω, og da endelig denne rækkes enkelte led i dette gebet er analytiske funktioner

af x, tør man, ifølge *Weierstrass's* ovennævnte sætning, vilkaarlig ofte differentiere denne række ledvis, og derfor ogsaa ledvis anvende ovenstaaende identitet for

$$\rho = \beta + q - 1,\ \beta + q - 2,\ \cdots,\ \beta + 1,\ \beta.$$

Derved erholdes ifølge (7) og (8)

$$h(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n G_n(x);\quad h(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)} a_n x^n,\quad |x| < g,$$

hvor rækken paa højre side atter er ligelig konvergent i Ω; erstattes dernæst i udtrykket § 1, (7) for alle n koefficienten a_n med

$$\frac{\Gamma(\beta+n)\,a_n}{\Gamma(\alpha+n)},$$

har vi bevist vor sætning for $p = 1$, og det fuldstændige induktionsbevis gennemføres nu ganske paa samme maade, idet man blot i ovenstaaende udvikling erstatter a_n med

$$\frac{\Gamma(\beta_1+n)\,\Gamma(\beta_2+n)\cdots\Gamma(\beta_{p-1}+n)}{\Gamma(\alpha_1+n)\,\Gamma(\alpha_2+n)\cdots\Gamma(\alpha_{p-1}+n)}\,a_n.$$

Da samme operation, idet α_r og β_r ombyttes, fører os fra den ny række tilbage til den gamle, er III bevist.

Ved anvendelse af denne sætning kan man med den yderst elementære formel § 1, (16) som udgangspunkt udlede en kendt række efter cylinderfunktioner samt mange andre efter hypergeometriske funktioner af højere orden. Vi kan imidlertid ikke her gaa nærmere ind paa dette spørgsmaal, men vil derimod gaa over til at generalisere de af *F. Neumann* givne udviklinger for produkter af to kuglefunktioner.

§ 3. Generalisationer af F. Neumanns rækker.

Betegner som sædvanlig $Q^{\nu,\rho}(x)$ den generaliserede kuglefunktion (metakuglefunktionen) af anden art, haves altsaa for $|x| > 1$

$$(1)\qquad Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{2\nu-2}}{x^{\rho+2\nu}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}+n\right)\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}+n\right)}{n!\,\Gamma(\nu+\rho+n+1)} \cdot \frac{1}{x^{2n}},$$

beviser man*), at konvergensgebetet for den uendelige række

*) Se min afhandling: *Recherches sur les fonctions sphériques* i Videnskabernes Selsk. skrifter, pp. 26, 31.

(2) $f(x) = A_0 Q^{\nu,\rho}(x) + A_1 Q^{\nu,\rho+1}(x) + \dots + A_n Q^{\nu,\rho+n} + \dots$

er den del af x-planen, som ligger udenfor en vis ellipse $E(a)$ med ligningen

$$\frac{\alpha^2}{a+1} + \frac{\beta^2}{a} = 1, \quad x = \alpha + i\beta, \tag{3}$$

hvor a er en positiv konstant, der alene afhænger af koefficienterne A_n i rækken paa højre side i (2), men derimod hverken af ν eller ρ. Betegner endvidere δ en vilkaarlig lille, men angivelig positiv størrelse, er den ovenomtalte række ligelig konvergent paa periferien af $E(a+\delta)$ og udenfor denne kurve*).

Betegner dernæst $P^{\nu,n}(x)$ ultrakuglefunktionen af første art, altsaa

$$P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \, \Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} (2x)^{n-2s}, \tag{4}$$

har *Gegenbauer***) bevist følgende formel

$$\frac{1}{(y-x)^{\rho+2\nu}} = \frac{2^{\rho+1}\Gamma(\nu+\rho)}{\Gamma(\rho+n)\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho+\nu+2n) P^{\nu+\rho,n}(x)\, Q^{\nu,\rho+n}(y), \tag{5}$$

hvor rækken paa højre side er ligelig konvergent, naar x ligger paa periferien eller i det indre af en vilkaarlig ellipse $E(a)$, medens y ligger paa periferien af eller udenfor ellipsen $E(a+\delta)$, hvor δ har samme betydning som ovenfor.

Anvendes nu den i § 2 udviklede metode paa formen (5), idet man sætter

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \rho + 2\nu - 1,$$

faas den ny rækkeudvikling

$$\frac{1}{y-x} = \frac{2^\rho y^{\rho+2\nu}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho+\nu+n)\, Q^{\nu,\rho+n}(y)\, B_n^{n,\rho}(x), \tag{6}$$

hvor vi for kortheds skyld har sat

$$B_n^{\nu,\rho}(x) = \sum_{r=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^r \, \Gamma(\nu+\rho+n-r)}{r!\,\Gamma(\rho+2\nu+n-r)} (2x)^{n-2r}. \tag{7}$$

---

*) Se min afhandling: *Recherches sur les fonctions sphériques* i Videnskabernes Selsk. skrifter, pp. 26, 31.

**) loc. cit. p. 50.

Rækken paa højre side i (7) er sikkert ligelig konvergent under samme betingelser som (5); af den ovenstaaende bemærkning om den ligelige konvergens af rækken (2) følger endvidere, at disse tilstrækkelige betingelser for den ligelige konvergens af (6) ogsaa er nødvendige. Rækkerne (5) og (6) har altsaa nøjagtig samme konvergensomraade.

Sættes dernæst i (6) $x = 1 : \eta$ og $y = 1 : \xi$, erholdes

$$(8) \qquad \frac{1}{\eta - \xi} = \frac{2^{\rho}}{\sqrt{\pi}\, \xi^{\rho + 2\nu}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho + \nu + n)\, Q^{\nu, \rho + n}\left(\frac{1}{\xi}\right) B_n^{\nu, \rho}\left(\frac{1}{\eta}\right) \frac{1}{\eta};$$

denne rækkes konvergensomraade bestemmes, ved at man i ellipseligningen (3) erstatter α og β med henholdsvis

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2};$$

derved erholdes den *Cassiniske* ellipse $C(a)$ med ligningen i retvinklede koordinater (α, β):

$$(9) \qquad (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{\alpha^2}{a + 1} - \frac{\beta^2}{a} = 0, \quad \xi = \alpha + i\beta;$$

denne kurve har et isoleret dobbeltpunkt i begyndelsespunkt og faar i polære koordinater ligningen

$$(10) \qquad r^2 = \frac{\cos^2\theta}{a + 1} + \frac{\sin^2\theta}{a}.$$

Rækken (8) er derfor ligelig konvergent, naar ξ ligger paa periferien eller i det indre af en $C(a + \delta)$, medens η ligger paa periferien af eller udenfor en $C(a)$.

Lad dernæst $f(\eta)$ være analytisk paa periferien og i det indre af $C(a)$, da tør rækken i (8), efter at være multipliceret med $f(\eta)$, integreres ledvis langs periferien af $C(a)$, naar ξ ligger indenfor denne kurve. *Cauchys* integralsætning giver da rækkeudviklingen

$$(11) \qquad f(\xi) = \frac{2^{\rho + 1}}{\pi\, \xi^{\rho + 2\nu}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho + \nu + n)\, A_n\, Q^{\nu, \rho + n}\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

hvor vi for kortheds skyld har sat

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a)} f(\eta)\, B_n^{\nu, \rho}\left(\frac{1}{\eta}\right) \frac{1}{\eta}\, d\eta.$$

Fremstilles $f(\xi)$ i det indre af cirklen $|\xi| = |(a+1)^{-\frac{1}{2}}|$ ved potensrækken

(12) $$f(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots + a_n \xi^n + \cdots,$$

faas ogsaa umiddelbart følgende udtryk for A_n:

(13) $$A_n = \sum_{r=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^r \Gamma(\nu + \rho + n - r)\, 2^{n-2r}}{r!\, \Gamma(\rho + 2\nu + n - 2r)} \cdot a_{n-2r}.$$

Sættes i (11) paany $\xi = 1 : x$, erholdes sætningen:

IV. Enhver funktion $f(x)$, der er analytisk overalt udenfor en vis ellipse $E(a)$, kan udvikles i en række af formen

(14) $$f(x) = \frac{2^{\rho+1} x^{\rho+2\nu}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho + \nu + n) A_n Q^{\nu,\rho+n}(x),$$

hvor A_n bestemmes ved udtrykket (13), idet $f(x)$ for $|x| > |(a+1)^{\frac{1}{2}}|$ fremstilles ved den af (12) for $\xi = 1 : x$ erholdte potensrække. Udviklingen (14) er ligelig konvergent paa periferien af og udenfor enhver ellipse $E(a + \delta)$.

Er specielt $f(x)$ analytisk i hele den uendelige x-plan undtagen i punkter, der tilhører det mellem $+1$ og -1, yderværdierne medregnede, liggende stykke af de reelle tals akse, er (14) anvendelig overalt i x-planen undtagen paa ovennævnte stykke af de reelle tals akse, og rækken er ligelig konvergent paa periferien af og udenfor enhver $E(\delta)$.

Da funktionen $x^{\rho+2\nu} Q^{\nu,\rho}(x)$ i hele den uendelige x-plan ikke har andre singulariteter end punkterne ± 1, er de af *F. Neumann**) givne rækkeudviklinger for produktet $Q^{\nu,\rho}(x)\, Q^{\nu,\sigma}(x)$ at opfatte som specielle tilfælde af (14).

Lad os endelig i (11) antage $a_{2n+1} = 0$, da haves ligeledes $A_{2n+1} = 0$; sættes dernæst $\xi = \sqrt{x}$ og a_n istedetfor a_{2n}, faas rækkeudviklingen

(15) $$f(x) = \frac{2^{\rho+2\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (\rho + \nu + 2n - 1) A_n G_n(x),$$

hvor vi for kortheds skyld har sat

---

*) Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen. Leipzig 1878.

$$(16)\quad G_n(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2} + n + r\right)\Gamma\left(\nu + \frac{\rho + 1}{2} + n + r\right)}{r!\,\Gamma(\rho + \nu + 2n + r)} x^{n+r},$$

og idet $f(x)$ for $|x|$ tilstrækkelig lille fremstilles ved den af (12) for $\xi = x$ erholdte potensrække:

$$(17)\quad A_n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r\,\Gamma(\rho + \nu + 2n - r)\,2^{2n-2r}}{r!\,(\Gamma(\rho + 2\nu + 2n - 2r)} \cdot a_{n-r}.$$

For at bestemme konvergensomraadet for (15), underkaster vi kurven (10) kvadratrodstransformationen $\xi = \sqrt{x}$; derved erholdes en kurve $K(a)$ med ligningen i polære koordinater

$$(18)\quad r = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}{a + 1} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}{a};$$

denne kurve er af fjerde orden med dobbeltpunkter i cirkelpunkterne; de mindste og største radii vektores afskæres henholdsvis paa de positive og de negative tals akse, nemlig

$$r = \frac{1}{a + 1}, \quad r = \frac{1}{a}.$$

Rækken (15) er derfor konvergent i det indre af $K(a)$ og ligelig konvergent paa periferien og i det indre af $K(a + \delta)$.

Lad os dernæst paa (15) anvende III for $p = 1$, $\alpha_1 = \beta$, $\beta_1 = \nu + \frac{\rho + 1}{2}$; da faas ved anvendelse af formlen

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho + 2\nu + 2n - 2r) =$$
$$= \Gamma\left(\frac{\rho + 1}{2} + \nu + n - r\right)\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + \nu + n - r\right) 2^{\rho + 2\nu + 2n - 2r - 1},$$

og idet man endvidere sætter $\nu + \frac{\rho}{2} = \alpha$, $\nu + \rho = \gamma$, sætningen:

V. Enhver funktion $f(x)$, der er analytisk i det indre af en kurve $K(a)$ kan i dette omraade udvikles i en række af formen

$$(19)\quad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\gamma + 2n - 1)\,A_n\,G_n(x),$$

hvor vi for korthedsskyld har sat

$$(20) \quad G_n(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n)\,\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + 2n)} \cdot x^n F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + 2n, x),$$

og hvor koefficienten A_n bestemmes ved udtrykket

$$(21) \quad A_n = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{(-1)^r\,\Gamma(\gamma + 2n - r)}{r!\,\Gamma(\alpha + n - r)\,\Gamma(\beta + n - r)} \cdot a_{n-r},$$

idet $f(x) = \Sigma a_n x^n$ for $|x| < 1 : (a + 1)$. Rækken i (19) er ligelig konvergent paa periferien og i det indre af kurven $K(a + \delta)$.

Ved den almindelige sætning III ses det, at en rækkeudvikling af formen (19), hvor

$$(22) \quad G_n(x) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{\Gamma(\alpha_1 + n + r)\,\Gamma(\alpha_2 + n + r) \cdots \Gamma(x_p + n + r)}{r!\,\Gamma(\beta_1 + n + r) \cdots \Gamma(\beta_{p-2} + n + r)\,\Gamma(\gamma + 2n + r)}\, x^{n+r}$$

har samme egenskab som ovennævnte.

Er $f(x)$ en hel transcendent, eller har denne funktion kun singulariteter liggende paa de positive tals akse og svarende til tal større end eller lig 1, haves i (18) $a = 0$, og rækkeudviklingen (19) gælder for alle endelige x, der blot ikke ligger paa ovennævnte stykke af de positive tals akse. Den dertil svarende række (19) er ligelig konvergent for alle $x = |x|\,e^{i\theta}$, naar blot $|x| \leq G$, $|x - 1| \geq \delta$ og $|\theta| \geq \delta$.

Det vil ligeledes her føre os altfor vidt at undersøge rækkeudviklinger, for hvilke en eller flere gammafunktioner borttages af tælleren i koefficienten paa højre side i (22). Kun skal vi bemærke, at *C. Neumanns* rækker efter cylinderfunktioner eller efter produkter af to saadanne funktioner er specielle tilfælde af disse rækker.

Bidrag til Løsningen af Jacobi's Inversionsproblem.

Af **Erik Schou.**

Jacobi's Inversionsproblem bestaar i følgende. Lad for en plan algebraisk Kurve af Slægten ρ

$$H_1(xy),\ H_2(xy),\ \ldots,\ H_\rho(xy)$$

betegne et fuldstændigt System af lineært uafhængige Integrander af første Art. Idet $(m_1 n_1)$, $(m_2 n_2)$, ..., $(m_\rho n_\rho)$ er ρ faste Punkter paa Kurven, skal man ved de ρ Ligninger:

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} \int_{(m_\alpha n_\alpha)}^{(x_\alpha y_\alpha)} H_\beta(xy)\,dx = u_\beta;\quad \beta = 1, 2, \ldots, \rho$$

bestemme Punkterne $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$ som Funktioner af u_1, u_2, ..., u_ρ. Løsningen af dette Problem, der, som bekendt, sker ved Hjælp af Thetafunktioner af ρ Variable, kan gives mange forskellige Former; i det følgende skal meddeles en saadan, som har den Fordel at kunne udledes meget simpelt og at være nem at anvende.

Denne Løsning er fra Forfatterens Side original, men efter Udarbejdelsen af denne Meddelelse har jeg bemærket, at der i *Bakers* Bog »Abels theorem and the allied theory including the theory of the Theta functions« Pag. 294 findes en Formel, som falder sammen med Formlen (B) Pag. 137 i det følgende. Den videre Behandling af Inversionsproplemet gennemføres imidlertid hos Baker paa en anden Maade og kun for det hyperelliptiske Tilfælde.

Det foreliggende Arbejde antages derfor at kunne frembyde nogen Interesse navnlig betragtet som en Anvendelse af Weierstrass's

Resultater. Den følgende Udvikling vil stadig støtte sig paa Weierstrass's »Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten« som ere offentliggjorte i Bd. IV af hans samlede Værker. Den der fulgte Metode kan imidlertid ikke antages at være almindelig kendt, og det vil derfor være nyttigt at give en kort Fremstilling af dens Hovedpunkter, for saa vidt som det behøves for Forstaaelsen af det følgende.

I.

Som Indledning til de Abelske Funktioners Teori giver Weierstrass en grundig Undersøgelse af de algebraiske Funktioner. Denne Undersøgelse er særlig karakteriseret ved, at der ikke gøres specielle Forudsætninger om de singulære Punkters Natur. Til Trods herfor giver disse Punkter ikke Anledning til Vanskeligheder eller Komplikationer i Beviserne, men Resultaterne fremtræder i deres fulde Almindelighed omfattende saavel almindelige som singulære Punkter.

Som det vigtigste Middel til at opnaa dette optræder den Form, som benyttes af Weierstrass til Fremstilling af Omegnen af et Punkt paa Kurven.

Lad (ab) være et Punkt paa Kurven. Alle Punkter, som ligger i Omegnen af (ab), kan fremstilles ved Rækkeudviklinger af Formen:

$$x = a + m_0 t^{\mu} + m_1 t^{\mu+1} + \dots,$$
$$y = b + n_0 t^{\nu} + n_1 t^{\nu+1} + \dots,$$

hvor t er en variabel Parameter, μ og ν positive eller negative hele Tal og $m_0, m_1 \dots, n_0, n_1, \dots$ konstante Størrelser.

I Almindelighed vil et enkelt Rækkepar være tilstrækkeligt til at fremstille hele Omegnen af Punktet (ab), men for de singulære Punkter kan der fordres flere Par, dog altid kun et endeligt Antal.

Samlingen af Punkter, som fremstilles ved et Rækkepar, kaldes et Element af Kurven, og Punktet (ab), ud fra hvilket Rækkeudviklingerne dannes, kaldes Elementets Midtpunkt. Et vilkaarligt Punkt af et Element betegnes ved $(x_t y_t)$.

Til enhver Værdi af Parametren t, hvis absolute Værdi er mindre end en vis Størrelse, svarer der et enkelt Punkt af Elementet. Omvendt kan Parametren vælges saaledes, at der, naar Elementet begrænses paa passende Maade, til et vilkaarligt Punkt af dette kun svarer en enkelt Værdi af Parametren. I det følgende tænkes Parametren stadig valgt paa denne Maade.

Det er ved saaledes at opløse Omegnen af de singulære Punkter Elementer, at Weierstrass bliver i Stand til, uden Vanskelighed, at opnaa den omtalte fulde Almindelighed i sine Undersøgelser.

Som Grundlag for hele Teorien indfører Weierstrass en rational Funktion, som bliver uendelig af første Orden med Résiduet — 1 i et vilkaarligt Punkt $(x'y')$, og som desuden har ρ andre vilkaarlige, men faste Punkter:

$$(a_1 b_1),\ (a_2 b_2),\ \ldots,\ (a_\rho b_\rho),$$

til Poler af første Orden. Antallet af disse Poler: ρ er lig med Kurvens Slægt.

Endelig bliver Funktionen nul i et vilkaarlig valgt Punkt: $(a_0 b_0)$.

Der er intet i Vejen for, at nogle af Punkterne $(a_\alpha b_\alpha)$ kunne falde sammen, eller at nogle af dem kunne falde i singulære Punkter. Hvis f. Eks. $(a_1 b_1)$ er singulært, og der fordres flere Elementer til Fremstillingen af dets Omegn, maa den ovenstaaende Definition fuldstændiggøres ved, at det angives, i hvilket af disse Elementer Funktionen bliver uendelig. Analogt for Punktet $(a_0 b_0)$. Funktionen betegnes ved:

$$H(xy,\ x'y'),$$

og den er ikke alene rational i (xy) men ogsaa i $(x'y')$.

Weierstrass beviser følgende vigtige Sætning.

Naar $(x_t y_t)$ og $(x'_\tau y'_\tau)$ betegne forskellige Elementer, haves:

$$H(x_t y_t,\ x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = R_1(t,\ \tau),$$

idet $R_1(t,\ \tau)$ er en Potensrække i t og τ, der kun kan indeholde et endeligt Antal negative Potenser af t og τ.

Betegne derimod $(x_t y_t)$, $(x_\tau y_\tau)$ samme Element, haves:

$$H(x_t y_t,\ x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + R_2(t,\ \tau),$$

idet $R_2(\mathrm{t},\ \tau)$ betegner en Potensrække af samme Art som $R_1(t,\ \tau)$. Hvis man specielt antager, at (xy), Midtpunktet for Elementet $(x_t y_t)$, $(x_\tau y_\tau)$ ikke falder sammen med noget af Punkterne $(a_\alpha b_\alpha)$ eller med $(a_0 b_0)$, haves:

$$H(x_t y_t,\ x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + P(t,\ \tau),$$

hvor $P(t,\ \tau)$ kun indeholder positive Potenser af t og τ.

Ved Hjælp af Funktionen $H(xy,\ x'y')$ føres man direkte til Integranderne af første, anden og tredje Art.

Lad $(x_t^{(\alpha)} y_t^{(\alpha)})$ betegne Elementet med Midtpunkt i $(a_\alpha b_\alpha)$; vi udvikle da:

$$H(x_t^{(\alpha)} y_t^{(\alpha)},\ x'y')$$

i Række efter Potenser af t. I Følge Definitionen indeholder denne Rækkeudvikling et Led med t^{-1} men ikke andre Led med negative Potenser af t.

Rækkeudviklingen kan altsaa skrives:

$$H(x_t^{(\alpha)} y_t^{(\alpha)},\ x'y') = H_\alpha(x'y')\, t^{-1} + H_\alpha^0(x'y') - L_\alpha(x'y') \cdot t + \ldots, ^{*)}$$

og Koefficienterne ville være rationale Funktioner af $(x'y')$. Weierstrass beviser nu, at $H_\alpha(xy)$ er en Integrand af første Art og $L_\alpha(xy)$ en Integrand af anden Art.

Betegner $(x_t y_t)$ et vilkaarligt Element, vil derfor

$$H_\alpha(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}$$

aldrig indeholde negative Potenser af t.

Størrelsen:

$$L_\alpha(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}$$

vil kun for et Element, nemlig $(x_t^{(\alpha)} y_t^{(\alpha)})$, indeholde en negativ Potens af t, og det vil da være t^{-2}, medens t^{-1} ikke vil forekomme.

Man har specielt:

$$H_\alpha(x_t^{(\beta)} y_t^{(\beta)}) \frac{dx_t^{(\beta)}}{dt} = tP(t), \text{ naar } \alpha \neq \beta$$

$$H_\alpha(x_t^{(\alpha)} y_t^{(\alpha)}) \frac{dx_t^{(\alpha)}}{dt} = 1 + tP(t).$$

$$L_\alpha(x_t^{(\beta)} y_t^{(\beta)}) \frac{dx_t^{(\beta)}}{dt} = tP(t), \text{ naar } \alpha \neq \beta$$

$$L_\alpha(x_t^{(\alpha)} y_t^{(\alpha)}) \frac{dx_t^{(\alpha)}}{dt} = -\frac{1}{t^2} + tP(t).$$

Man ser, at de ρ Integrander af første Art:

$$H_1(xy),\ H_2(xy),\ \ldots,\ H_\rho(xy)$$

ere lineært uafhængige.

---

*) Der er her gjort en Afvigelse fra Weierstrass' Betegnelser. Den Størrelse, som her er betegnet ved $L_\alpha(x'y')$, betegnes nemlig af Weierstrass ved $H'_\alpha(x'y')$, hvilken Betegnelse kan give Anledning til Misforstaaelse.

$H(xy, x'y')$ er, betragtet som Funktion af $(x'y')$, en Integrand af tredje Art. I Rækkeudviklingen for:

$$H(xy, x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau}$$

forekommer der nemlig aldrig negative Potenser af τ, med mindre Elementet $(x'_\tau y'_\tau)$ har enten (xy) eller $(a_0 b_0)$ til Midtpunkt. I første Tilfælde haves:

$$H(xy, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau} + P(\tau)$$

og i andet:

$$H(xy, x_\tau^{(0)} y_\tau^{(0)})\frac{dx_\tau^{(0)}}{d\tau} = -\frac{1}{\tau} + P(\tau).$$

Heraf følger, at:

$$\int^{(x'y')} H(xy, x'y')\,dx'$$

er et Integral af tredje Art med de to logarithmiske Poler (xy) og $(a_0 b_0)$ og Résiduerne $+1$ og -1.

Mere almindeligt vil

$$\int^{(x'y')}\left[H(x_1 y_1, x'y') - H(x_2 y_2, x'y')\right]dx'$$

være et Integral af tredje Art med de to logarithmiske Poler $(x_1 y_1)$ og $(x_2 y_2)$ og Résiduerne $+1$ og -1.

Til Trods for, at det ikke direkte vedrører det følgende, skulle vi dog meddele, at Weierstrass beviser Relationen:

$$\frac{\partial}{\partial x}H(xy, x'y') - \frac{\partial}{\partial x'}H(x'y', xy)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\rho}\left\{H_\alpha(x'y')\,L_\alpha(xy) - H_\alpha(xy)\,L_\alpha(x'y')\right\},$$

der er af stor Vigtighed. Man kan saaledes ved dens Hjælp let udlede de fundamentale Relationer mellem Perioderne for Integralerne af første og anden Art, endvidere faas Udtrykkene for Perioderne for Integralerne af tredje Art og endelig Sætningen om Ombytning af Parameter og Argument i Integralerne af tredje Art.

Periodevejene af første og anden Art betegnes ved henholdsvis:

$$K_\beta \text{ og } K'_\beta; \quad \beta = 1, 2, \ldots, \rho,$$

og for Perioderne gælde følgende Betegnelser:

$$\int_{(K_\beta)} H_\alpha(xy)\,dx = 2\omega_{\alpha\beta}; \quad \int_{(K'_\beta)} H_\alpha(xy)\,dx = 2\omega'_{\alpha\beta},$$
$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \rho.$$
$$\int_{(K_\beta)} L_\alpha(xy)\,dx = 2\eta_{\alpha\beta}, \quad \int_{(K'_{\alpha\beta})} L_\alpha(xy)\,dx = 2\eta'_{\alpha\beta}$$

Vedrørende Thetafunktionerne faa vi Brug for følgende Betegnelser og Formler.

Thetafunktionen af de ρ Variable $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ betegnes for Kortheds Skyld ved: $\Theta(u_\varepsilon)$.

Funktionen er hel m. H. t. alle de Variable og tilfredsstiller Fundamentalligningerne:

$$\Theta(u_\varepsilon + 2\omega_{\varepsilon\beta}) = \Theta(u_\varepsilon)\, e^{\sum\limits_{\alpha=1}^{\rho} 2\eta_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega_{\alpha\beta})},$$
$$\beta = 1, 2, \ldots, \rho.$$
$$\Theta(u_\varepsilon + 2\omega'_{\varepsilon\beta}) = \Theta(u_\varepsilon)\, e^{\sum\limits_{\alpha=1}^{\rho} 2\eta'_{\alpha\beta}(u_\alpha + \omega'_{\alpha\beta})},$$

desuden er:

$$\Theta(-u_\varepsilon) = \Theta(u_\varepsilon).$$

Funktionen af (xy):

$$\Theta\left(\int_{(a_0 b_0)}^{(xy)} H_\varepsilon(xy)\,dx + c_\varepsilon\right),$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ ere uafhængige af (xy), har ρ Nulpunkter, og naar disse betegnes ved:

$$(u_1 v_1),\ (u_2 v_2)\ \ldots\ (u_\rho v_\rho),$$

vil man have Ligningerne:

$$\sum_{\mu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(u_\mu v_\mu)} H_\alpha(xy)\,dx = -c_\alpha + w_\alpha,$$

idet vi have sat:

$$w_\alpha = \tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{2\rho-2} \int_{(a_0 b_0)}^{(p_\nu q_\nu)} H_\alpha(xy)\,dx,$$

hvor $(p_1 q_1), (p_2 q_2), \ldots, (p_{2\rho-2}, q_{2\rho-2})$ betegne de $2\rho - 2$ bevægelige Nulpunkter for en vilkaarlig Integrand af første Art. I Følge Abels Theorem er Størrelserne w_α uafhængige af, hvilken Integrand af første

Art der vælges, men det er øjensynligt, at der til deres fuldstændige Bestemmelse fordres Angivelse af de Veje, langs hvilke Integralerne skulle tages. Denne Bestemmelse sker let i hvert enkelt Tilfælde, naar man kender Nulpunkterne svarende til en speciel Værdi af c_α.

II.

Vi gaa nu over til den egentlige Genstand for denne Meddelelse, og skulle da begynde med at udlede en vigtig Relation, der danner Generalisationen af en Formel, som meddeles af Weierstrass (Werke. Bd. IV, Pag. 598). Lad (x_1y_1), (x_2y_2), $\ldots$, $(x_\rho y_\rho)$ være ρ variable Punkter og $(a_\tau b_\tau)$ et Punkt af Elementet med Centrum i det vilkaarlige Punkt (ab).

Vi ville da betragte Funktionen:

$$\psi(x_1y_1,\ x_2y_2,\ \ldots,\ x_\rho y_\rho)$$
$$= \frac{\sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau}\,\Theta'_\alpha\left(\sum_{\nu=1}^{\rho}\int_{(a_0b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\varepsilon(xy)\,dx - \int_{(a_0b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon(xy)\,dx - w_\varepsilon\right)}{\Theta\left(\sum_{\nu=1}^{\rho}\int_{(a_0b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\varepsilon(xy)\,dx - \int_{(a_0b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon(xy)\,dx - w_\varepsilon\right)},$$

hvor vi have sat:

$$\frac{\partial\Theta(u_\varepsilon)}{\partial u_\alpha} = \Theta'_\alpha(u_\varepsilon).$$

Vi betragte først ψ som Funktion af et vilkaarligt af Punkterne $(x_\alpha y_\alpha)$ f. Eks. (x_1y_1).

Lade vi (x_1y_1) beskrive Periodevejen K_β, vil ψ faa Tilvæksten:

$$2\sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau}\cdot\eta_{\alpha\beta},$$

medens der til Periodevejen K'_β vil svare Tilvæksten:

$$2\sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau}\cdot\eta'_{\alpha\beta}.$$

Nu ser man let, at Integralet:

$$\int_{(a_0b_0)}^{(x_1y_1)}\left[-\frac{\partial}{\partial x}H(xy,\ a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau}L_\alpha(xy)\right]dx$$

faar akkurat de samme Tilvækster, og heraf følger, at:

$$\psi - \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(x_1 y_1)} \left[-\frac{\partial}{\partial x} H(xy,\ a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha (a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} L_\alpha(xy) \right] dx$$

er en éntydig Funktion af $(x_1 y_1)$. Det er imidlertid indlysende, at ψ er en symmetrisk Funktion af $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ .... $(x_\rho y_\rho)$ og:

$$\psi(x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ \ldots,\ x_\rho y_\rho)$$
$$- \sum_{\nu=1}^{\rho} \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} \left[-\frac{\partial}{\partial x} H(xy,\ a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha (a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} L_\alpha(xy) \right] dx$$

er derfor en éntydig Funktion af $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ .... $(x_\rho y_\rho)$.

Vi betragte dernæst igen ψ som Funktion af $(x_1 y_1)$ alene og skulle bestemme de Værdier af $(x_1 y_1)$, for hvilke ψ bliver uendelig, hvilke Værdier aabenbart maa findes iblandt dem, for hvilke:

$$\Theta\left(\int\limits_{(a_0 b_0)}^{(x_1 y_1)} H_\varepsilon(xy)\, dx + \sum_{\nu=2}^{\rho} \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\varepsilon(xy)\, dx - \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon \right) = 0.$$

Der findes i alt ρ Værdier af $(x_1 y_1)$, som tilfredsstille denne Ligning, betegnes de ved: $(u_1 v_1)$, $(u_2 v_2)$, ..., $(u_\rho v_\rho)$ haves, i Følge det tidligere meddelte:

$$\sum_{\mu=1}^{\rho} \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(u_\mu v_\mu)} H_\beta(xy)\, dx = - \sum_{\nu=2}^{\rho} \int\limits_{(a_0 b)_0}^{(x_\nu y_\nu)} H_\beta(xy)\, dx + \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\beta(xy)\, dx + 2w_\beta.$$

Lad nu: $(\xi_1 \eta_1)$, $(\xi_2 \eta_2)$, ..., $(\xi_{\rho-1} \eta_{\rho-1})$ betegne de $\rho - 1$ Punkter, som sammen med $(x_2 y_2)$ .... $(x_\rho y_\rho)$ udgøre de bevægelige Nulpunkter for en Integrand af første Art. Man har da, i Følge Betydningen af w_β og ved Hjælp af Abels Theorem:

$$\sum_{\nu=2}^{\rho} \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\beta(xy)\, dx + \sum_{\nu=1}^{\rho-1} \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(\xi_\nu \eta_\nu)} H_\beta(xy)\, dx = 2w_\beta;\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho.$$

og den foregaaende Ligning kan da skrives:

$$\sum_{\mu=1}^{\rho} \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(u_\mu v_\mu)} H_\beta(xy)\, dx = \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\beta(xy)\, dx + \sum_{\nu=1}^{\rho-1} \int\limits_{(a_0 b_0)}^{(\xi_\nu \eta_\nu)} H_\beta(xy)\, dx;$$

naar $(a_\tau b_\tau)$ samt Punkterne $(x_\nu y_\nu)$ ere vilkaarlige, saa at ogsaa Punkterne $(\xi_\nu \eta_\nu)$ kunne betragtes som vilkaarlige, medfører denne Ligning, at Punkterne $(u_1 v_1), \ldots, (u_\rho v_\rho)$ falde sammen med $(a_\tau b_\tau)$, $(\xi_1 \eta_1) \ldots (\xi_{\rho-1} \eta_{\rho-1})$, der altsaa er de søgte Punkter.

Vi skulle nu undersøge, hvorledes ψ forholder sig i Omegnen af disse Punkter.

Man ser for det første, at ψ har en Pol af første Orden med Résiduet $+1$ i Punket $(a_\tau b_\tau)$.

I Punkterne $(\xi_\nu \eta_\nu)$ har ψ derimod en endelig Værdi.

Vi have nemlig:

$$\Theta\left(\int_{(a_0 b_0)}^{(\xi_\nu \eta_\nu)} H_\varepsilon(xy)\,dx + \sum_{\nu=2}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\varepsilon(xy)\,dx - \int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon(xy)\,dx - w_\varepsilon\right) = 0,$$

og da $(\xi_\nu \eta_\nu)$ samt Punkterne $(x_\nu y_\nu)$ ere uafhængige af $(a_\tau b_\tau)$ kan man heraf udlede:

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau}\,\Theta'_\alpha\left(\int_{(a_0 b_0)}^{(\xi_\nu \eta_\nu)} H_\varepsilon(xy)\,dx\right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=2}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\varepsilon(xy)\,dx - \int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon(xy)\,dx - w_\varepsilon\right) = 0,$$

hvilken Ligning medfører, at ψ faar en endelig Værdi for $(x_1 y_1) = (\xi_\nu \eta_\nu)$. Funktionen:

$$\int_{(a_0 b_0)}^{(x_1 y_1)} \left[-\frac{\partial}{\partial x} H(xy,\; a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} L_\alpha(xy)\right] dx$$

har ligesom ψ en Pol af første Orden med Résiduet $+1$ i $(a_\tau b_\tau)$ og i øvrigt ingen andre Poler. Sammenholdes dette med, hvad vi tidligere have bevist, komme vi derfor til det Resultat, at:

$$\psi(x_1 y_1,\; x_2 y_2,\; \ldots,\; x_\rho y_\rho)$$
$$- \sum_{\nu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} \left[-\frac{\partial}{\partial x} H(xy,\; a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} L_\alpha(xy)\right] dx$$

er éntydig og endelig paa hele Kurven. En saadan Funktion maa imidlertid være uafhængig af $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$, og dens Værdi kan bestemmes ved at give disse Punkter specielle Værdier. Vi sætte:

$$(x_1 y_1) = (x_2 y_2) = \ldots . = (x_\rho y_\rho) = (a_0 b_0)$$

og faa da:

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} \left[-\frac{\partial}{\partial x} H(xy,\ a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha (a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} L_\alpha (xy) \right] dx$$

$$= \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha (a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} \Theta'_\alpha \left(\sum\limits_{\nu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\varepsilon (xy)\, dx - \int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon (xy)\, dx - w_\varepsilon \right)}{\Theta \left(\sum\limits_{\nu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\varepsilon (xy)\, dx - \int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon (xy)\, dx - w_\varepsilon \right)}$$

$$+ \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha (a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} \Theta'_\alpha \left(\int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon (xy)\, dx + w_\varepsilon \right)}{\Theta \left(\int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon (xy)\, dx + w_\varepsilon \right)}.$$

III.

Efter at denne Relation er bleven bevist, ligger Løsningen af det Jacobi'ske Inversionsproblem i Virkeligheden meget nær.

Punktet $(x_\nu y_\nu)$ er ganske vilkaarligt, uafhængigt af $(a_\tau b_\tau)$ samt af de andre Punkter $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$; vi kunne derfor i Steden for $(x_\nu y_\nu)$ sætte et vilkaarligt Punkt $(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)})$ af Elementet med Midtpunkt i $(x_\nu y_\nu)$. Sættes yderligere:

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\beta (xy)\, dx = u_\beta; \quad \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho$$

$$-\frac{\partial^2 \log \Theta (v_\varepsilon)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = p_{\alpha\beta} (v_\varepsilon); \quad \alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ \rho$$

$$F(xy,\ a_\tau b_\tau) = \frac{\partial}{\partial x} H(xy,\ a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} - \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} L_\alpha(xy)$$

$$- \sum_{\alpha,\beta}^{1,\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau)\frac{da_\tau}{d\tau} H_\beta(xy) p_{\alpha\beta}\left(u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon(xy)\,dx - w_\varepsilon\right),$$

faa vi ved at differentiere den fundne Relation med Hensyn til t, og derpaa at sætte $t = 0$:

$$\left[F\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)},\ a_\tau b_\tau\right)\frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right]_{t=0} = 0. \qquad \text{(B)}$$

Udtrykket

$$\left[F(x_t y_t,\ a_\tau b_\tau)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t=0}$$

bliver altsaa Nul for $(x_t y_t) = (x_t^{(1)} y_t^{(1)}),\ (x_t^{(2)} y_t^{(2)}),\ \ldots,\ (x_t^{(\rho)} y_t^{(\rho)})$.

Lad nu $H(xy)$ være en vilkaarlig Integrand af første Art, saa at Udtrykket:

$$\left[H(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t=0}$$

altid er endeligt.

Idet nu:

$$T(xy,\ a_\tau b_\tau) = \frac{\left[F(x_t y_t,\ a_\tau b_\tau)\dfrac{dx_t}{dt}\right]_{t=0}}{\left[H(x_t y_t)\dfrac{dx_t}{dt}\right]_{t=0}}$$

er en rational Funktion af (xy), se vi, at denne Funktion bliver Nul for $(xy) = (x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ \ldots,\ (x_\rho y_\rho)$.

Vi skulle nu bevise, at naar Punkterne $(x_1 y_1), (x_2 y_2), \ldots, (x_\rho y_\rho)$ ere vilkaarlige og forskellige indbyrdes, ville de være enkelte Nulpunkter for Funktionen $T(xy, a_\tau b_\tau)$.

Vi antage, at $(x_\nu y_\nu)$ er Nulpunkt af anden Orden for $T(xy, a_\tau b_\tau)$, men at $(x_\nu y_\nu)$ ikke falder sammen med noget af de andre af Punkterne $(x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ \ldots,\ (x_\rho y_\rho)$.

Vi skulle altsaa have:

$$\frac{d}{dt}\left(F\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)},\ a_\tau b_\tau\right)\frac{dx_t}{dt}\right) = 0 \text{ for } t = 0.$$

Da $(x_\nu y_\nu)$ er uafhængig af $(a_\tau b_\tau)$, maa denne Ligning gælde, hvorledes dette Element end vælges, og vi kunne derfor lade $(a_\tau b_\tau)$ falde sammen med Elementet $(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)})$. Endvidere bemærkes, at da $(x_\nu y_\nu)$ er ganske vilkaarligt, kunne vi antage, at det ikke falder sammen med $(a_0 b_0)$ eller med noget af Punkterne $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, ..., $(a_\rho b_\rho)$.

Vi have:

$$\frac{d}{dt}\left(F\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)},\ x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_t}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} H\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)},\ x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau} - \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau} \frac{d}{dt}\left(L_\alpha\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right)$$

$$- \sum_{\alpha,\beta}^{1,\rho} H_\alpha\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau} \frac{d}{dt}\left(H_\beta\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right) p_{\alpha\beta}\left(u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)})} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon\right)$$

Vi bemærke nu, at da

$$H_\alpha\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}$$

ikke indeholder negative Potenser af t, og da det samme, i Følge de om $(x_\nu y_\nu)$ gjorte Forudsætninger, er Tilfældet med

$$L_\alpha\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt},$$

vil

$$\frac{d}{dt}\left(H_\alpha\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right) \text{ og } \frac{d}{dt}\left(L_\alpha\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right)$$

have endelige Værdier for $t = 0$.

Endvidere have vi

$$H\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)},\ x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau),$$

idet $P(t, \tau)$ kun indeholder positive Potenser af t og τ, og altsaa:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} H\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)},\ x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau}\right]_{t=0} = \frac{2}{\tau^3} + P(\tau).$$

Vi se nu, at Ligningen

$$\frac{d}{dt}\left[F\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)},\ x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right]_{t=0} = 0$$

antager Formen:

$$\frac{2}{\tau^3} + P(\tau)$$

$$-\sum_{\alpha,\beta}^{1,\rho} H_\alpha(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau} \frac{d}{dt}\left[H_\beta(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right]_{t=0} p_{\alpha\beta}\left(u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)})} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon\right) = 0;$$

men en saadan Ligning kan bevises at være absurd under de gjorte Forudsætninger.

I Følge den ovenfor givne Regel til Bestemmelse af Nulpunkterne for

$$\Theta\left(\int_{(a_0 b_0)}^{(xy)} H_\varepsilon(xy)\, dx + c_\alpha\right),$$

vil de ρ Nulpunkter for

$$\Theta\left(u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(ab)} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon\right),$$

betragtet som Funktion af (ab), falde i Punkterne $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$; og de vil altsaa alle være enkelte, saafremt disse Punkter ere forskellige indbyrdes.

Specielt har man altsaa

$$\left[\Theta\left(u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)})} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon\right)\right]_{\tau=0} = 0.$$

Vi sætte

$$v_\varepsilon = u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)})} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon$$

og

$$v_\varepsilon^{(0)} = u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\gamma y_\gamma)} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon,$$

og faa da

$$\Theta(v_\varepsilon) = -\tau\left[\sum_{\gamma=1}^{\rho}\left[H_\gamma(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau}\right]_{\tau=0} \cdot \Theta'_\gamma(v_\varepsilon^{(0)}) + \tau(\ )\cdots\right].$$

Endvidere er

$$\frac{d}{d\tau}\,\frac{\partial \log \Theta(v_\varepsilon)}{\partial v_\beta} = -\sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{\partial^2 \log \Theta(v_\varepsilon)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} H_\alpha\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{\rho} p_{\alpha\beta}(v_\varepsilon)\, H_\alpha\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau}.$$

Vi faa nu, idet

$$\frac{\partial \log \Theta(v_\varepsilon)}{\partial v_\beta} = -\frac{\Theta'_\beta\left(v_\varepsilon^{(0)}\right)}{\tau \sum\limits_{\gamma=1}^{\rho} \left[H_\gamma\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau}\right]_{\tau=0} \Theta'_\gamma\left(v_\varepsilon^{(0)}\right)} + P(\tau),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} p_{\alpha\beta}(v_\varepsilon)\, H_\alpha\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau}$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \cdot \frac{\Theta'_\beta\left(v_\varepsilon^{(0)}\right)}{\sum\limits_{\gamma=1}^{\rho} \left[H_\gamma\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau}\right]_{\tau=0} \Theta'_\gamma\left(v_\varepsilon^{(0)}\right)} + R(\tau),$$

hvor $P(\tau)$ og $R(\tau)$ kun indeholde positive Potenser af τ.

Udtrykket

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1,\rho} H_\alpha\left(x_\tau^{(\nu)} y_\tau^{(\nu)}\right) \frac{dx_\tau^{(\nu)}}{d\tau} \left[\frac{d}{dt}\left(H_\beta\left(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)}\right) \frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right)\right] p_{\alpha\beta}(v_\varepsilon)$$

bliver derfor kun uendeligt af anden Orden for $\tau = 0$, og heraf følger, at en Ligning af den angivne Form er absurd.

Hermed er det bevist, at $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$ i Almindelighed vil være enkelte Nulpunkter for Funktionen $F(xy, a_\tau b_\tau)$.

Man kan yderligere bevise, at denne Funktion ikke kan have noget af $(a_\tau b_\tau)$ uafhængigt Nulpunkt, som er forskelligt fra $(x_1 y_1)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$.

Lad os antage, at der fandtes et saadant Nulpunkt $(\xi\eta)$. Beviset føres da analogt med det ovenstaaende, idet vi lade Elementet $(a_\tau b_\tau)$ falde sammen med $(\xi_t \eta_t)$, hvorved vi ligesom før komme til en Absurditet.

Størrelserne

$$p_{\alpha\beta}\left(u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(\xi_\tau \eta_\tau)} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon\right)$$

har nemlig endelige Værdier for $\tau = 0$, medens Summen af de øvrige Led paa venstre Side i Ligningen

$$\left[F(\xi_t \eta_t, \xi_\tau \eta_\tau) \frac{d\xi_t}{dt} \right]_{t=0} = 0,$$

bliver uendelig af anden Orden for $\tau = 0$.

Vi have nu bevist følgende Sætning:

Naar

$$u_\beta = \sum_{\nu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\beta(xy)\, dx; \quad \beta = 1, 2, \ldots, \rho$$

og vi sætte

$$-\frac{\partial^2 \log \Theta(v_\varepsilon)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = p_{\alpha\beta}(v_\varepsilon); \quad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \rho$$

samt

$$F(xy, a_\tau b_\tau) = \frac{\partial}{\partial x} H(xy, a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} - \sum_{\alpha=1}^{\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} L_\alpha(xy)$$

$$- \sum_{\alpha,\beta}^{1,\rho} H_\alpha(a_\tau b_\tau) \frac{da_\tau}{d\tau} H_\beta(xy)\, p_{\alpha\beta}\left(u_\varepsilon - \int_{(a_0 b_0)}^{(a_\tau b_\tau)} H_\varepsilon(xy)\, dx - w_\varepsilon \right),$$

og endelig ved $H(xy)$ betegner en vilkaarlig Integrand af første Art, vil den rationale Funktion af (xy)

$$T(xy, a_\tau b_\tau) = \frac{F(xy, a_\tau b_\tau)}{H(xy)}$$

have Nulpunkter af første Orden i Punkterne $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $\ldots$, $(x_\rho y_\rho)$, og denne Funktion vil ikke have andre af $(a_\tau b_\tau)$ uafhængige Nulpunkter.

Dette giver os imidlertid Løsningen af det Jacobiske Inversionsproblem, som er udtrykt ved Ligningerne

$$\sum_{\nu=1}^{\rho} \int_{(a_0 b_0)}^{(x_\nu y_\nu)} H_\beta(xy)\, dx = u_\beta; \quad \beta = 1, 2, \ldots, \rho;$$

thi den Opgave at bestemme de af det vilkaarlige Punkt $(a_\tau b_\tau)$ uafhængige Nulpunkter til den rationale Funktion af (xy),

$$T(xy, a_\tau b_\tau)$$

kan aabenbart løses ved algebraiske Operationer.

Løsningen kan udføres paa mange forskellige Maader; saaledes kan man give $(a_\tau b_\tau)$ to forskellige Værdier $(a_1 b_1)$ og $(a_2 b_2)$ og bestemme $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$ som de fælles Nulpunkter til Funktionerne $T(xy, a_1 b_1)$ og $T(xy, a_2 b_2)$.

Man kan ogsaa udvikle $T(xy, a_\tau b_\tau)$ efter Potenser af τ

$$T(xy, a_\tau b_\tau) = \sum T_\mu (xy, ab) \cdot \tau^\mu,$$

de forskellige rationale Funktioner af (xy):

$$T_0 (xy, ab), \; T_1 (xy, ab), \; \ldots .$$

vil da alle blive Nul i Punkterne $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ..., $(x_\rho y_\rho)$.

Løsningen kan yderligere gives mange forskellige Former ved specielle Valg af $(a_\tau b_\tau)$.

Om Beliggenheden af Spidser paa Kurver af 6te Orden.

Af **E. Valentiner.**

De særegne Punkter (Dobbeltpunkter og Spidser) paa algebraiske Kurver danner for Kurver af lavere end sjette Orden ikke Grupper med særlige Egenskaber; først ved Kurver af sjette Orden indtræder dette, og som et af de simpleste Tilfælde kan nævnes, at syv vilkaarlige Punkter ikke kan tages til Spidser paa en saadan Kurve; de 6 vil bestemme et geometrisk Sted for det syvende; i al Fald en Del af dette geometriske Sted bestaar af de seks Keglesnit, der kan lægges gennem fem og fem af de seks givne Punkter eller med andre Ord: 6 vilkaarlige Punkter af et Keglesnit og et 7de vilkaarligt Punkt udenfor Keglesnittet kan tages til Spidser paa en Kurve af 6te Orden.

Er nemlig Keglesnittets Ligning $s = 0$ og er $v = 0$ Ligningen for en Kurve af 3dje Orden gennem de 6 Punkter paa Keglesnittet, saa er $v^2 + 2avs + bs^2 = 0$ Ligningen for en Kurve af 6te Orden med Dobbeltpunkter i de 6 Punkter, naar a og b er Funktioner af henholdsvis første og anden Grad i de løbende Koordinater; nu vil Tangenterne i et af disse Dobbeltpunkter falde sammen, naar Kurven $a^2 - b = 0$ gaar gennem det, ellers ikke; skal altsaa alle 6 (eller blot 5) Punkter være Spidser, saa maa denne Kurve falde sammen med $s = 0$ eller man maa have $a^2 - b \equiv ks$, hvor k er en konstant; Kurvens Ligning kan altsaa skrives: $(v + as)^2 = ks^3$.

Skal nu denne Kurve have en 7de Spids, kan man forudsætte, at $v = 0$ har oenne til Dobbelpunkt (thi $v = 0$ skal jo blot være en Kurve af 3dje Orden, der gaar gennem de 6 første Spidser og ikke bestaar af $s = 0$ og en ret Linje); da maa Kurven $a^2 - ks = 0$ ogsaa have den til Dobbeltpunkt; nu vil Tangenterne til Kurven af 6te Orden i det ny Punkt være de samme som Tangenterne til Kurven $2av + (a^2 - ks)s = 0$; hvis vi nu lader s og a være Funktioner med

fuldstændig bestemte Koefficienter ($a^2 - ks = 0$ er jo Ligningen for de to Tangenter fra den 7de Spids til $s = 0$, $a = 0$ er dette Punkts Polar med Hensyn til $s = 0$, saa at Forholdene mellem Koefficienterne i s og Forholdene mellem Koefficienterne i a er fuldstændig bestemte ved de 7 Spidser) saa vil jo k have en fuldstændig bestemt Værdi (forskellig fra 0 og fra ∞); men Funktionen v vil kun være bestemt paa en konstant Faktor nær; denne kan nu vælges saaledes, at de to Tangenter til $2av + (a^2 - ks)s = 0$ falder sammen, og dette kan ske paa to Maader; ingen af de to Værdier af Faktoren kan være 0, da jo Tangenterne saa vilde blive $a^2 - ks = 0$, som er to adskilte Linjer; derimod vil én af Værdierne være uendelig stor, naar Punktet er Spids paa $v = 0$ og begge Værdier blive uendelige, naar desuden Spidstangenten er Tangent til $s = 0$.

Vi kan altsaa formulere Sætningen ovenfor saaledes:

7 Punkter, hvoraf de 6 ligger paa et Keglesnit, er i Almindelighed Spidser paa 2 Kurver af 6te Orden; hvis Punktet udenfor Keglesnittet ligger paa en bestemt Kurve φ*), reducerer den ene Kurve sig til en Dobbeltgren af 3dje Orden og for særlige Punkter af Kurven φ falder begge Kurver sammen i Dobbeltgrenen; denne har en Spids i det 7de Punkt.

Formen $(v + as)^2 = ks^3$ for Kurveligningen viser, at Tangenterne i de 6 Spidser paa Keglesnittet tillige er Tangenter til samme Kurve af 3dje Orden, nemlig Kurven $v + as = 0$.

Man maa naturligvis sikre sig, at de fundne Kurver af 6te Orden er usammensatte; men dette vil følge af, at de 6 Punkter paa Keglesnittet i Følge Ligningens Form virkelig er Spidser og ikke Selvberøringspunkter; Kurven kan da f. Eks. ikke bestaa af en ret Linje og en egentlig Kurve af 5te Orden; thi en saadan kan højst have 5 Spidser.

Vi vil endnu undersøge Beliggenheden af Spidserne. naar der kommer en ottende til.

Vi gaar tilbage til Formen $(v + as)^2 = ks^3$ for Kurvens Ligning, men forudsætter nu, at $v = 0$ gaar gennem baade den 7de og den 8de Spids; tillige indfører vi Betegnelsen s for $s\sqrt[3]{k}$ og a for $\frac{a}{\sqrt[3]{k}}$ hvorefter Ligningen faar Formen $(v + as)^2 = s^3$; $s - a^2 = 0$ maa da være et Keglesnit gennem de to ny Spidser; vi sætter $s - a^2 = s_1$ og

*) φ vil blive af 6te Orden.

faar da som Kurveligning $v^2 + 2vas_1 + 2va^3 - 2a^2s_1^2 - a^4s_1 - s_1^3 = 0$; da nu de ny Spidser ikke ligger paa $s = 0$, altsaa heller ikke paa $a = 0$, saa maa de være Dobbeltpunkter paa $2v - as_1 = 0$; altsaa maa $v = 0$ og $s_1 = 0$ have samme Tangent i hvert af de to Punkter; hvis disses Forbindelseslinje er $c = 0$, maa man have $v \equiv bs_1 + c^2d$, hvor b og d er af første Grad; da er $2v - as_1 \equiv s_1(2b - a) + 2c^2d$; heraf følger, at $2b - a = 0$ maa gaa gennem begge Punkter, hvis $s_1 = 0$ ikke har noget af dem til Dobbeltpunkt*); altsaa er $2b - a \equiv mc$, hvor m er en konstant; indsættes nu $2b - mc$ i Kurveligning i Stedet for a, saa bliver den $(bs_1 + c^2d)^2 + 2(bs_1 + c^2d)(2b - mc)s_1 + 2(bs_1 + c^2d)(2b - mc)^3 - 2(2b - mc)^2s_1^2 - (2b - mc)^4s_1 - s_1^3 = 0$; da nu $s_1 = 0$ og $c = 0$ gaar gennem begge Punkter, kan vi, naar vi vil bestemme Tangenterne i disse Punkter, udelukke alle Led, der er af højere end anden Grad i s_1 og c og bestemme Tangenterne til den Kurve, hvis Ligning saa staar tilbage; vi faar $8b^3ms_1c + 16c^2db^3 - 3b^2s_1{}^2 = 0$; da $b = 0$ ikke gaar gennem noget af Punkterne, kan vi nøjes med Kurven $8ms_1cb + 16c^2db - 3s_1^2 = 0$; skal nu Punkterne være Spidser, saa maa for dem gælde Ligningen $m^2b + 3d = 0$; man har da $m^2b + 3d \equiv nc$, hvor n er konstant; da er $3v \equiv 3bs_1 - c^2(m^2b - nc)$, $s = s_1 + (mc - 2b)$; for Skæringspunkterne mellem $s = 0$ og $v = 0$ faar man da ved Elimination af s_1 mellem Kurvernes Ligning $- 3b(mc - 2b)^2 + c^2(nc - m^2b) = 0$; denne Kurves Skæringspunkter med $s = 0$ er da de 6 oprindelige Spidser; men Kurven er sammensat af 3 rette Linjer gennem Skæringspunktet for $c = 0$ og $b = 0$. De 8 Spidser ligger altsaa saaledes, at de kan deles i 4 Par saaledes, at Parrenes Forbindelseslinjer gaar gennem samme Punkt.

Da desuden Keglesnittene $s = 0$ og $s_1 = 0$ har Dobbeltrøring i Linjen $a = 0$, hvorpaa Punktet $b = 0$, $c = 0$ ligger, saa har dette Punkt samme Polar med Hensyn til de to Keglesnit, og man ser altsaa, at 3 hvilkesomhelst Par ligger paa et Keglesnit.

De 3 Forbindelseslinjers Ligning kan omskrives til

$\left(b - \frac{mc}{3}\right)^3 + c^3 . \left(\frac{m^3}{27} - \frac{n}{12}\right) = 0$; sættes nu $b - \frac{mc}{3} = \alpha$ og $c . \sqrt[3]{\frac{m^3}{27} - \frac{n}{12}} = \beta$, saa faar Ligningen Formen $\alpha^3 + \beta^3 = 0$; da den 4de Forbindelseslinje er $\beta = 0$, saa ser man, at de 4 Linjer ligger æqvianharmonisk.

De sidste 3 Sætninger er Dr. Crones (i Acta math.).

---

*) Dette kan forudsættes, da ellers $v = 0$, som var en vilkaarlig Kurve gennem de 8 Punkter, vilde faa et af dem til Dobbeltpunkt.

Om Bestemmelsen af Polygoner, der paa een Gang ere om- og indskrevne i almindelige plane Kurver af 3die Orden.

Af H. Valentiner.

Da jeg for et Par Maaneder siden blev gjort opmærksom paa, at det den 15de Februar 1909 var Prof. *Zeuthens* 70 Aars Fødselsdag, var jeg strax paa det rene med, at den rette Maade at fejre Dagen paa, var at vise, at hans Lærervirksomhed havde sat Frugt hos hans Elever.

Det lille Arbejde, jeg her forelægger, er for en stor Del fremgaaet af de Theorier, Prof. Zeuthen har bidraget saa meget til at udvikle: den tællende Geometri. Tillige knytter det paa en morsom Maade mine egne selvstændige Undersøgelser, de endelige Transformationsgruppers Theori, sammen med, hvad jeg direkte har lært i min Ungdom ved Prof. Zeuthens Forelæsninger. Den oprindelige Aarsag til, at jeg er kommet ind paa Problemet, er Undersøgelsen angaaende: Hvilke lineære Transformationer gives der, der kunne transformere en plan Kurve af tredie Grad til sig selv?

Det viste sig nemlig, at i specielle Tilfælde kan en saadan Kurve transformeres til sig selv*) ved en lineær Transformation af 3die Orden, der har sine Dobbeltpunkter i Vinkelspidserne af en Trekant, der baade er om- og indskrevet i Kurven, og det blev da nødvendigt at bestemme alle Trekanter med denne Egenskab. Det viste sig nu, at Bestemmelsen af disse Trekanter ikke var synderlig vanskeligere end Bestemmelsen af selve Vendetangenterne. Bestemmelsen af de almindelige paa een Gang om- og indskrevne Polygoner føre ind paa abelske Ligninger, og Problemet er i det væsentlige identisk med Problemet om de elliptiske Funktioners Division.

---

*) Naar tre Vendetangenter, der svare til tre Vendepunkter beliggende paa en ret Linie, gaa gjennem samme Punkt.

Vi skulle nu i det følgende vise, at naar en Polygon er om- og indskreven om en Kurve af 3die Orden, φ_3, ere alle dens Vinkelspidser Sammenfaldspunkter, d. v. s. Punkter, hvori alle en Kurves Skjæringspunkter med φ_3 kunne falde sammen, ligesom at alle saadanne Sammenfaldspunkter ville være Vinkelspidser i Polygoner af den omtalte Slags. Dernæst skal der ved Exempler oplyses, hvordan man algebraisk kan bestemme Polygoner, der baade ere om- og indskrevne.

Polygoner, der baade ere om- og indskrevne i en plan Kurve af tredie Orden φ_3.

1) Lad os antage, at der paa en vilkaarlig Kurve af 3die Orden φ_3 ligger en Gruppe af Punkter G, i Antal m, bestemte ved at skulle ligge paa en Kurve φ_n, af n^{te} Orden, der endnu skjærer φ_3 i p Punkter $(m+p=3n)$, saa gives der altid m^2 Grupper, korresiduale til G, i hvilke alle m Punkter falde sammen i et Punkt.

Vi antage, at Sætningen gjælder for et Tal $m-1$, da vil den ogsaa gjælde for m. Igjennem G lægge vi en Kurve φ_n, hvor n er valgt saa høj, at den til G residuale Punktgruppe G', hvori φ_n endnu skjærer φ_3, indeholder mindst et Punkt. Gjennem G' og et vilkaarligt Punkt af G kunne vi da efter Forudsætningen altid lægge $(m-1)^2$ Kurver φ_n, der endnu skjære φ_3 i lutter sammenfaldende Punkter, Q. Omvendt kunne vi gjennem et vilkaarligt Punkt Q af φ_3 og G' altid lægge en φ_n, der skjærer φ_3 i $(m-1)$ i Q sammenfaldende Punkter og endnu i et fast Punkt P, bestemt ved φ_n's øvrige Skjæringspunkter med φ_3. Lade vi nu Punkterne P og Q svare til hinanden, svarer der til hvert Punkt P $(m-1)^2$ Punkter Q, og til hvert Q et Punkt P. Lægge vi nu gjennem et Punkt, R, af G' en ret Linie l_1, saa vil denne endnu skjære φ_3 i to Punkter P_1 og P_2, til hvilke der svare $2(m-1)^2$ Punkter Q, der kunne forbindes med R ved rette Linier l_2. Omvendt svarer der til hver l_2 to rette Linier l_1. Der gives da $2[(m-1)^2+1]$ rette Linier gennem R, i hvilke en l_1 og en l_2 falde sammen. Dette kan nu ske paa to Maader enten ved at et Punkt P falder sammen med et tilsvarende Punkt Q eller ved at et Punkt P, et tilsvarende Q og R falde paa samme rette Linie. I sidste Tilfælde vil φ_n skjære φ_3 i de tre Punkter P, Q, R, der ligge paa en ret Linie, og dens øvrige Skjæringspunkter med φ_3 vil da ligge paa en φ_{n-1}, der gaar gjennem G' med Undtagelse af R og har sine øvrige $m-2$ Skjæringspunkter med φ_3 sammenfaldende i Q. Efter det

foregaaende, gives der $(m-2)^2$ saadanne Punkter Q. Det Antal Punkter i hvilke et Q falder sammen med et P bliver altsaa

$$2[(m-1)^2+1]-(m-2)^2=m^2.$$

Da nu den Sætning, der skal bevises, er rigtig for $m=1$, gjælder den almindeligt.

Som specielt Tilfælde kan mærkes, der gives altid paa φ_3 $9m^2$ Punkter Q_m i hvilke alle Skjæringspunkter mellem φ_3 og en φ_m falde sammen. Saadanne Punkter, der her altid betegnes med Q_m, kalder jeg simpelthen Sammenfaldspunkter af m^{te} Orden. Der maa dog gjøres opmærksom paa, at i det nævnte Antal er medregnet alle Sammenfaldspunkter af lavere Orden, n, naar n gaar op i m. I de $9m^2$ Punkter Q_m er altsaa f. Ex. medregnet de 9 Vendepunkter, Sammenfaldspunkter af første Orden. Hvor mange Sammenfaldspunkter Q_m der findes, som ikke tillige ere Q_n, $n<m$, er en meget vanskelig taltheoretisk Opgave.

Som en almindelig Sætning kan mærkes, hvis en φ_n gaar gjennem $3n-1$ Punkter Q_r, maa det $3n^{te}$ Skjæringspunkt ogsaa være et Q_r. Thi $(\varphi_n)^{3r}$ vil da skjære φ_3 i alle dens Skjæringspunkter med $(3n-1)$ Kurver φ_r, og maa altsaa endnu skjære φ_3 i $3r$ Punkter, der ligge paa en φ_r, og, da disse Punkter falde sammen, i et Q_r. Specielt haves, at en ret Linie, der gaar gjennem to Q_r endnu maa skjære φ_3 i et Sammenfaldspunkt af r^{te} eller lavere Orden.

2) Lægges en Tangent til et Q_r, da vil denne endnu skjære φ_3 i et Sammenfaldspunkt. Lad nu r være lige, $2m$, da vil Tangenten taget $3m$ Gange, gaa igjennem alle φ_3's Skjæringspunkter med en φ_r og altsaa endnu skjære φ_3 i et Q_m. Omvendt vil en Tangent fra et Q_m, enten røre φ_3 i et Q_{2m} eller i et Q_m. Er m lige, vil Røringspunktet altid være et Q_{2m}. Er derimod m ulige, kan der altid fra et Q_m trækkes een Tangent, der rører i et nyt Q_m. Vi antager, at Q_m er et virkeligt Sammenfaldspunkt af m^{te} Orden, altsaa ikke tillige et Q_n, hvor $n<m$. Igjennem Q_m kan der da lægges en $\varphi_{\frac{m+1}{2}}$, der i Q_m skjærer φ_3 i $3\left(\frac{m+1}{2}\right)-1$ sammenfaldende Punkter, og endnu i et Punkt P udenfor Q_m. Denne $\varphi_{\frac{m+1}{2}}$, taget to Gange, vil gaa gjennem alle φ_m's i Q_m sammenfaldende Punkter og endnu skjære φ_3 i 3 Punkter, der ligger paa en ret Linie, l, hvis ene Skjæringspunkt ligger i Q_m og hvis to andre falde i P. l tangerer altsaa i P. l taget

$3\binom{m+1}{2} - 1$ Gange gaar gjennem alle φ_3's Skjæringspunkter med $\varphi_{\frac{m+1}{2}}$ og skjærer endnu φ_3 i $3m$ i P sammenfaldende Punkter, der ligge paa en φ_m. P er da et nyt Q_m. At kun een af Tangenterne fra det førstnævnte Q_m rører i et nyt saadant Punkt, følger let af, at ethvert saadant Punkt maa ligge paa en $\varphi_{\frac{m+1}{2}}$, der gaar gjennem dette Punkt og har sine øvrige Skjæringspunkter sammenfaldende i det førstnævnte Q_m.

Er altsaa m ulige, saa ser man, at naar man i et Q_m trækker en Tangent til en φ_3, i denne Tangents tredie Skjæringspunkt med φ_3 en ny Tangent o. s. v., saa ville disse Tangenter, da Punkterne Q_m kun forekomme i endeligt Antal, danne en lukket Polygon, der paa een Gang er om- og indskrevet i φ_3 og hvis Vinkelspidser alle ere Punkter Q_m.

Det ses tillige, at ethvert Q_m kun er Vinkelspids i een saadan Polygon. Har en saadan Polygon n Vinkelspidser betegnes den $P_{m,n}$.

Er m lige, ses det, at man ved at gaa frem paa lignende Maade omsider naar til en Vinkelspids i een af de lige omtalte Polygoner.

3) Har man forelagt en Polygon $P_{m,n}$, saa ere de to Tal m og n afhængige af hinanden og der danner sig Spørgsmaalet: Hvorledes afhænge de af hinanden?

Vi antage da nu givet en i φ_3 om- og indskrevet Polygon $A_1 A_2 \ldots . A_n$, hvor Siden $A_1 A_2$ rører i A_1, $A_2 A_3$ i A_2 o. s. v.: Hvor stort er da det tilsvarende m? Siden $A_1 A_2$ kaldes l_1, $A_2 A_3$ l_2 o. s. v. $l_1^2\, l_3$ danner da en Kurve af 3die Orden, der gaar gjennem alle l_2's Skjæringspunkter med φ_3, og altsaa endnu skjærer denne i Punkter, der ligge paa en φ_2. Af disse Skjæringspunkter falde 4 i A_1, et i hvert af Punkterne A_3, A_4. $\varphi_2{}^2$ gaar da gjennem alle l_3's Skjæringspunkter med φ_3. $\varphi_2{}^2$ skjærer da endnu φ_3 i Punkter, der ligge paa en $\varphi_3{}^1$. Af disse Punkter ligge 8 i A_1, et i A_4. $(\varphi_3{}^1)^2 l_5$ gaar gjennem alle l_4's Skjæringspunkter med φ_3, og deres øvrige Skjæringspunkter ligge paa en φ_6. Af disse Skjæringspunkter falde et i A_5, et i A_6. $\varphi_6{}^2$ gaar gjennem alle l_5's Skjæringspunker med φ_3, og skjærer endnu φ_3 i Punkter, der ligge paa en φ_{11}. Af de sidstnævnte Punkter falde 32 i A_1, et i A_6 o. s. v. Lad nu Polygonen være en 6-Kant, da vil $\varphi_{11}{}^2$ gaa gjennem l_6's Skjæringspunkter med φ_3 og endnu skjære φ_3 i 63 Punkter, der alle falde i A_1 og ligge paa en φ_{21}. Lad den være

en 7-Kant, da vil $\varphi^2_{11}\, l_7$ gaa gjennem l_6's Skjæringspunkter med φ_3 og endnu skjære φ_3 i Punkter beliggende paa en φ_{22}, hvoraf 65 falde i A_1, et i A_7. Endelig vil φ^2_{22} gaa gjennem alle φ_3's Skjæringspunkter med l_7 og endnu skjære φ_3 i 129 Punkter, der ligge paa en φ_{43} og alle falde i A_1. A_1 er altsaa et Q_{43}. Almindeligt kommer man paa denne Maade til: I enhver $P_{m,n}$ er hver af Vinkelspidserne et $Q_{\frac{2^n \mp 1}{3}}$, eftersom n er lige eller ulige.

Herved er dog at mærke, at den virkelige Orden af Vinkelspidserne som Sammenfaldspunkter godt kan være lavere end de her nævnte Tal, idet den kan være en Faktor i disse. Saaledes vil det i det efterfølgende vise sig, at i $P_{m,6}$, m baade kan være 21 og 7.

4) Vi skulle nu søge at finde Antallet af Sider i en Polygon $P_{m,n}$, naar man har givet m, Ordenen af Sammenfaldet for de Punkter, der ere Vinkelspidser i den.

Vi betegne Polygonen paa samme Maade som før, og antage her, at i de omtalte Q_m m er Punktets virkelige Sammenfaldsorden, saa at det altsaa ikke tillige kan være et Q_r hvor $r < m$. Lad nu altsaa A_1 være den første Vinkelspids og Linien $A_1 A_2$, l_1, røre i A_1, da vil $l_1^{\frac{3m+1}{2}}$ (m antages ulige) foruden i $3m$ i A_1 sammenfaldende Punkter, endnu skjære φ_3 i $\frac{3m+1}{2} + 1$ Punkter, der ligge paa en $\varphi_{\frac{m+1}{2}}$. Af disse Punkter falde et i A_1, $\frac{3m+1}{2}$ i A_2. Bestemmes dernæst et Tal x_1, saaledes at $2x_1 + \frac{3m+1}{2} \equiv 0$ (mod $3m$), da vil $\varphi_{\frac{m+1}{2}}\, l_2^{x_1}$, foruden i A_2 skjære i Punkter af en Kurve, der har et Skjæringspunkt i A_1, de øvrige x_1 i A_3. Man bestemmer da et Tal x_2, saaledes at $2x_2 + x_1 \equiv 0$ (mod $3m$) o. s. v. Paa denne Maade bestemmes der Antal x_1, x_2, x_3 o. s. v., saaledes at der gives Kurver, der har et af sine Skjæringspunkter beliggende i A_1 og henholdsvis x_1, x_2, x_3 .... i A_3, A_4, A_5 ..... Saaledes bliver man ved til man kommer til det første Tal x_p, der kan vælges lig 2. Polygonen har da $p + 2$ Vinkelspidser, idet A_{p+2} nu ligger paa en Kurve, der har 3 Skjæringspunkter med φ_3, hvoraf to i A_{p+2}, et i A_1. Kurven er altsaa en ret Linie, der rører i A_{p+2}. Det er klart, at man ikke kan lægge nogen Tangent fra A_1 til noget tidligere Punkt A_s, $s < p + 2$, idet dette da vilde være et Sammenfaldspunkt af lavere end m^{te} Orden. Man har da nu Systemet af Kongruenser

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + \frac{3m+1}{2} \equiv 0 \\ 2x_2 + x_1 \equiv 0 \\ 2x_3 + x_2 \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 4 + x_{p-1} \equiv 0 \end{array}\right\} \text{mod } 3m$$

og heraf

$$+ (-2)^{p+1} + \frac{3m+1}{2} \equiv 0 \pmod{3m}.$$

Heraf haves da f. Ex. naar

$$m = 3, \ p = 1, \ n = 3,$$
$$m = 5, \ p = 2, \ n = 4,$$
$$m = 7, \ p = 4, \ n = 6.$$

5) I det følgende skal der gives et Par Eksempler paa den algebraiske Bestemmelse af Polygoner, der paa en Gang ere omskrevne og indskrevne i en φ_3. Vi ville da først forsøge at bestemme Trekanter af den nævnte Art. Man har her ifølge det foregaaende $m = 3$, $n = 3$ $(P_{3,3})$. Der findes i alt 9^2 Q_3, men imellem disse er medregnet de 9 Vendepunkter, altsaa findes der $9^2 - 9 = 72$ virkelige Punkter Q_3, der fordele sig som Vinkelspidser i 24 $P_{3,3}$. Lægges der igjennem Vinkelspidserne af en saadan Trekant og to Vendepunkter et Keglesnit, maa dette ogsaa gaa gjennem et tredje Vendepunkt. Thi Keglesnittet, taget tre Gange, gaar gjennem alle Trekantens og to Vendetangenters Skjæringspunkter med φ_3 og maa altsaa endnu skjære φ_3 i tre sammenfaldende Punkter, der ligge paa en ret Linie. Man faar da alle $P_{3,3}$ ved at opsøge alle de $P_{3,3}$, hvis Vinkelspidser ligge paa et Keglesnit, der gaar gjennem to faste Vendepunkter og et vilkaarligt tredie, der gjerne kan falde sammen med et af de faste. Vælger man dette tredie Vendepunkt paa samme rette Linie som de to faste, vil det lige omtalte Keglesnit opløse sig i to rette Linier, og de omtalte Trekanter blive hver af Vendetangenterne tagne tre Gange. Tilbage bliver da de øvrige 8 Vendepunkter, og da der til hver 3 Vendepunkter maa svare lige mange Trekanter $P_{3,3}$, har man Sætningen: Igjennem hver tre Vendepunkter, der ikke ligger paa en ret Linie, kan der lægges 3 Keglesnit, som gaa gjennem Vinkelspidserne af en om- og indskreven Trekant.

Hvert Vendepunkt i en φ_3 er Centrum for en perspektivisk Transformation af anden Orden, der transformere φ_3 til sig selv. Vælges nu tre Vendepunkter, og vælges to af dem som Centrer for to perspektiviske Transformationer, der transformere φ_3 til sig selv, vil enhver af

dem transformere de tre Vendepunkter, til Punkter der ere residuale med dem, og tagne efter hinanden ville de transformere dem til Punkter der ere korresiduale med dem. Altsaa ville alle Keglesnit, der gaa gjennem de første tre Vendepunkter endnu skjære φ_3 i tre Punkter, hvorigjennem der kan lægges et Keglesnit, der gaar gjennem de ved de to perspektiviske Transformationer transformerede Vendepunkter. To perspektiviske Transformationer, der transformere φ_3 til sig selv, udførte efter hinanden, ere nu imidlertid æqvivalente med en Transformation af tredie Orden, der transformerer φ_3 til sig selv, og vi se da at den omtalte sammensatte Transformation enten vil ombytte de tre Trekanter hvis Vinkelspidser ligge paa Keglesnit sammen med de givne tre Vendepunkter (høre til de givne tre Vendepunkter) eller transformere enhver af disse Trekanter til sig selv. Da den Transformation, vi have omtalt, ikke er afhængig af det tredie Vendepunkt, have vi Sætningen:

Enhver Transformation af tredie Orden, der transformerer en φ_3 til sig selv, vil enten ombytte de tre Trekanter, der høre til en given Vendepunkts-Trekant, eller transformere enhver af disse Trekanter for sig til sig selv, idet den ombytter Siderne i den. Da der gives 8 Transformationer af tredie Orden, der transformere en φ_3 til sig selv (to for hvert Sæt af tre Linier, der indeholde alle 9 Vendepunkter), vil der altid gives Transformationer af 3die Orden, der transformerer φ_3 til sig selv, og tillige transformere en af dens om- og indskrevne Trekanter til sig selv. Det er let at se, at der for hver Trekant gives to saadanne Transformationer, og da der er 24 Trekanter, vil enhver saadan Transformation lade 6 Trekanter uforandrede.

Alle Siderne i Trekanterne ere Tangenter til φ_3 i deres ene Endepunkt; men nu kan de enten transformeres saaledes til sig selv, at paa enhver Side Røringspunktet føres til det ikke rørende Endepunkt eller omvendt. Af de 6 Trekanter, der hver for sig, ved samme Transformation af tredie Orden transformeres til sig selv, ville nu de tre transformeres saaledes, at Røringspunktet føres til det ikke rørende Punkt, medens de tre andre transformeres til sig selv paa den modsatte Maade. Den anden Transformation af 3die Orden, der transformerer hver af de 6 Trekanter til sig, vil da transformere hver af dem paa modsat Maade.

Vi skulle nu bruge dette til Bestemmelse af de 72 Q_3, og idet vi kjende Vendepunkterne skulle vi vise, at dette kan ske ved lutter Ligninger af tredie Orden.

Den almindelige Ligning for en φ_3 kan skrives

$$\varphi_3 \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0.$$

Ligningen for en Tangent er da

$$X(x^2 - ayz) + Y(y^2 - axz) + Z(z^2 - ayx) = 0.$$

φ_3 transformeres til sig selv ved den lineære Transformation

$$\mu x' = x$$
$$\mu y' = \alpha y$$
$$\mu z' = \bar{\alpha} z,$$

hvor $\alpha^3 = 1$.

Lad ved denne Transformation Røringspunktet x, y, z for en Side i en om- og indskrevet Trekant føres hen til det Punkt X, Y, Z, hvori Siden endnu skjærer φ_3, saa har man til Bestemmelse af x, y, z Ligningen

$$\psi_3 \equiv x^3 + \alpha y^3 + \bar{\alpha} z^3 = 0,$$

der fremstiller en Kurve af 3die Orden, der gaar gjennem Vinkelspidserne af de tre om- og indskrevne Trekanter, der ved den nævnte Transformation hver for sig transformeres til sig selv. Man finder nu af de to Ligninger $\varphi_3 = 0$ og $\psi_3 = 0$

$$x = \frac{(1-\alpha)y^3 + (1-\bar{\alpha})z^3}{3azy}$$

og heraf

$$[(1-\alpha)y^3 + (1-\bar{\alpha})z^3]^3 + 27a^3(\alpha y^3 + \bar{\alpha} z^3)x^3 y^3 = 0.$$

hvoraf $y : z$ kan findes alene ved Løsningen af Ligninger af 3die Grad. Vinkelspidserne i de andre tre om- og indskrevne Trekanter, der transformeres til sig selv ved den omtalte Transformation findes ved i denne Ligning at ombytte α og $\bar{\alpha}$. De andre Punkter Q_3 findes paa lignende Maade ved at gaa ud fra de øvrige Transformationer af tredie Orden, der transformere φ_3 til sig selv.

5) Uagtet det foregaaende tilstrækkeligt viser, hvorledes man kan bruge Theorien om φ_3's Transformation til sig selv i Forbindelse med de her udviklede Theorier om om- og indskrevne Polygoner til paa simpel Maade at finde Sammenfaldspunkterne, skal jeg dog endnu tage et Exempel, nemlig Bestemmelsen af de paa een Gang om- og indskrevne Firkanter. Vinkelspidserne i disse er Punkter Q_5, og af disse er der $15^2 - 9 = 216$. Altsaa er der 54 $P_{5,4}$. Kaldes en saadan Firkant $ABCD$, hvor A er Røringspunktet for Siden AB, saa

kan man, ved den i 4) udviklede Methode, finde en φ_4, der har et af sine Skjæringspunkter med φ_3 i A, 11 i C; men paa samme Maade findes en ny φ_4, der har et Skjæringspunkt i C, 11 i A. Tilsammen danne disse to φ_4 en φ_8, der har 12 Skjæringspunkter i A, 12 i C. Men i A har en φ_5 alle sine Skjæringspunkter med φ_3 sammenfaldende, og det samme gjælder om C. Disse to φ_5 danne en φ_{10}, der gaar gjennem alle φ_8's Skjæringspunkter med φ_3. Altsaa findes der en φ_2 der, der har tre af sine Skjæringspunkter med φ_3 i A, tre i C. Men da vil en ret Linie, der gaar gjennem A og C, taget tre Gange, gaa gjennem alle φ_2's Skjæringspunkter med φ_3 og endnu skjære φ_3 i et Vendepunkt. Altsaa vil en Diagonal i en om- og indskreven Firkant gaa igjennem et Vendepunkt, og da Vendepunktet er Centrum for en perspektivisk Transformation af anden Orden, der transformerer φ_3 til sig selv, vil den ogsaa transformere den omtalte Firkant til sig selv, og Diagonalerne skjære hinanden i det omtalte Vendepunkt. Da der er 54 $P_{5,4}$, vil altsaa enhver perspektivisk Transformation, der transformerer φ_3 til sig selv, transformere hver af sex $P_{5,4}$ til sig selv. Herpaa beror Løsningen af den stillede Opgave.

Ligningen for φ_3 kan altid skrives

$$\varphi_3 \equiv u^3 + 3axyz = 0, \text{ hvor } u = x + y + z.$$

u er da en Linie, der gaar gjennem tre Vendepunkter. Vendetangenterne have Ligningerne $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Den perspektiviske Transformation, der har Centrum $x = 0$, $y + z = 0$, kan udtrykkes ved

$$\mu x^1 = -x$$
$$\mu y^1 = -z$$
$$\mu z^1 = -y.$$

Dens Axe har Ligningen $y - z = 0$. Vi ville nu søge at bestemme de $P_{5,4}$, hvis Diagonaler skære hinanden i $x = 0$, $y + z = 0$. Lad een af de valgte $P_{5,4}$ være $ABCD$, hvor A har Koordinaterne x, y, z og B x_1, y_1, z_1, da har man

$$\text{(A)} \qquad 0 = x_1(u^2 + ayz) + y_1(u^2 + axz) + z_1(u^2 + ayx),$$

og da Tangenten i x_1, y_1, z_1 endnu skal skære i det transformerede Punkt til x, y, z, altsaa x, z, y, har man

$$\text{(B)} \qquad 0 = x(u_1^2 + ay_1z_1) + z(u_1^2 + ax_1z_1) + y(u_1^2 + ay_1x_1),$$
$$\text{hvor } u_1 = x_1 + y_1 + z_1.$$

En vilkaarlig ret Linies Ligning kan skrives som

$$x = \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

og dens Skæringspunkter med φ_3 bestemmes ved

$$\big((1 + \alpha_2)y + (1 + \alpha_3)z\big)^3 + 3a(\alpha_2 y + \alpha_3 z)yz = 0.$$

Kaldes Rødderne heri $\frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \frac{y_3}{z_3}$, faar man

$$\frac{y_1}{z_1} \cdot \frac{y_2}{z_2} \cdot \frac{y_3}{z_3} = -\left(\frac{1 + \alpha_3}{1 + \alpha_2}\right)^3.$$

For Ligningen (A)'s Vedkommende, faar man

$$\left(\frac{1 + \alpha_3}{1 + \alpha_2}\right) = \frac{y(z - x)}{z(y - x)},$$

og da to af dens Skjæringspunkter med φ_3 falde i x, y, z,

$$\frac{y_1}{z_1} = -\frac{y(z - x)^3}{z(y - x)^3}$$

eller

$$\frac{y_1}{y(z - x)^3} = \frac{z_1}{z(x - y)^3} = \frac{x_1}{x(y - z)^3} = \frac{u_1}{u(y - z)(z - x)(x - y)}$$

Indsættes disse Værdier i (B), haves en Kurve af 9de Orden, der skjærer φ_3 i de omtalte 24 Sammenfaldspunkter af 5te Orden og desuden har Vendetangenten $x = 0$, og Vendepunktet $x = 0$, $u = 0$. Sætte vi nu $x = 1$, $t = y + z$, $v = yz$, ville t og v kun faa 12 Værdier svarende til de 24 Værdier af x, y, z, u.

Ligningen (B) bliver nemlig ved Indsættelsen til

$$\begin{aligned} 0 = u^3(y - z)^2(z - x)^2(x - y)^2 + a\big(xyz(z - x)^3(x - y)^3 \\ + xz^2(y - z)^3(x - y)^3 \\ + xy^2(y - z)^3(z - x)^3\big) \end{aligned}$$

eller efter Indførelsen af de nye Ubekjendte

$$(A^1) \quad 0 = (1 + t)^3(t^2 - 4v)(v - t + 1)^2 - a\big[v(v - t + 1)^3 + (t^2 - 4v)^2(t - 3tv - v^2)\big]$$

medens Ligningen for φ_3 bliver

$$(B^1) \qquad (1 + t)^3 + 3av = 0.$$

Elimineres v faar man en Ligning af 12^{te} Grad, men denne kan løses ved Hjælp af en Ligning af 6^{te} Grad og Ligninger, der kunne løses ved Roduddragninger. Man ved nemlig, at naar een Rod er $t = \frac{y + z}{x}$ er en anden $t^1 = \frac{y_1 + z_1}{x_1}$ og man har

$$t_1 = \frac{-tv + 3v - 1}{t^2 - 4v} = \frac{(1+t)^3(t-3) - 3a}{3at^2 + 4(1+t)^3}.$$

En symetrisk Funktion af t og t_1 faar nu kun 6 Værdier, og ved at tage en saadan, T, til ny Ubekjendt, vil Ligningen af 12[te] Grad reduceres til en Ligning af 6[te] Grad. Man ser da let, at den fuldstændige Bestemmelse af alle om- og indskrevne Firkanter kræver Løsningen af een Ligning af 6[te] Grad og desuden Løsningen af Ligninger, der kunne løses ved Roduddragning.

Indsatte man i ovenstaaende Ligning for t_1 paa højre Side atter t_1 for t, vilde man komme tilbage til t, men den Ligning, man nu kom til, vilde være af 16de Grad og altsaa ikke den samme, som man kom til ved at eliminere v mellem (A^1) og (B^1), da den indeholder 4 fremmede Rødder svarende til Vendepunkterne, Rødder i Ligningen

$$t = \frac{(1+t)^3(t-3) - 3a}{3at^2 + 4(1+t)^3}.$$

Problemet om Bestemmelsen af Sammenfaldspunkter skal ikke forfølges videre, kun skal jeg endnu bemærke, at en ind- og omskreven 6-Kant har Vinkelspidser, der enten ere Q_7 eller Q_{21}. I første Tilfælde vil de Diagonaler, der forbinde modstaaende Vinkelspidser i Polygonen, gaa igennem et Vendepunkt, i sidste Tilfælde vil en saadan Diagonal gaa gjennem et Q_3. I første Tilfælde vil Problemet kunne behandles analogt med det her omhandlede.

